Studi Perpindahan Panas Material pada Sistem Koordinat Segitiga

Imam Basuki, Cari, Suparmi

Program Studi S2 Ilmu Fisika Pascasarjana, Universitas Sebelas Maret Surakarta
Jl. Ir. Sutami no 36 Kentingan Surakarta

hitakayana2yb@gmail.com

Abstract: *Partial Differential Equations (PDP) Laplace equation can be applied to the heat conduction. Heat conduction is a process that if two materials or two-part temperature material is contacted with another it will pass heat transfer. Conduction of heat in a triangle shaped object has a mathematical model in Cartesian coordinates. However, to facilitate the calculation, the mathematical model of heat conduction is transformed into the coordinates of the triangle. PDP numerical solution of Laplace solved using the finite difference method. Simulations performed on a triangle with some angle values α and β*

Keywords: *heat transfer, triangle coordinates system.*

Abstrak Persamaan Diferensial Parsial (PDP) Laplace dapat diaplikasikan pada persamaan konduksi panas. Konduksi panas adalah suatu proses yang jika dua materi atau dua bagian materi temperaturnya disentuhkan dengan yang lainnya maka akan terjadilah perpindahan panas. Konduksi panas pada benda berbentuk segitiga mempunyai model matematika dalam koordinat cartesius. Namun untuk memudahkan perhitungan, model matematika konduksi panas tersebut ditransformasikan ke dalam koordinat segitiga. Penyelesaian numerik dari PDP Laplace diselesaikan menggunakan metode beda hingga. Simulasi dilakukan pada segitiga dengan beberapa nilai sudut α dan β

Kata kunci : perpindahan panas, sistem koordinat segitiga.

PENDAHULUAN

Perpindahan panas merupakan salah satu fenomena fisis dimana bentuk persamaan keadaannya dinyatakan dalam persamaan diferensial parsial (PDP) Laplace. Panas mengalir dari benda bertemperatur lebih tinggi ke benda bertemperatur lebih rendah.

Laju perpindahan panas yang melewati benda padat sebanding dengan gradien temperatur atau beda temperatur persatuan panjang (Flower, 1990).

Pola material yang menjadi objek kajian penelitian dengan bentuk penyelesaiannya pada system koordinat segitiga yaitu persamaan keadaan yang semula dalam sistem koordinat cartesius ditransformasikan menjadi persamaan dalam sistem koordinat segitiga. Selanjutnya setelah melalui transformasi koordinat tersebut diselesaikan secara numerik mengggunakan finite differential method (FDM) dengan memvariasi domain didiskritisasi atas elemen-elemen kecil yang dibatasi oleh titik-titik perpotongan (node).

URAIAN PENELITIAN

A. Menguraikan Landasan Teori

Pada tahap ini akan diuraikan teori-teori dasar perpindahan panas, transformasi koordinat segitiga, metode numeric penyelesaian persamaan differensial.

B. Analisa Perpindahan Panas

Perpindahan panas yang dianalisis pada sistem koordinat segitiga, mengikuti tahapan sebagai berikut :

1. Transformasi koordinat
2. membuat bentuk numerik dari persamaan sistem melalui metode beda hingga
3. Penyelesaian solusi numerik dari persamaan sistem yang terbentuk.
4. Kesimpulan dan menyusun laporan

ANALISA DAN PEMBAHASAN

A. Model Perpindahan Panas

Persamaan keadaan berbentuk PDP Laplace, yaitu :

$$\Delta T = 0 \tag{1}$$

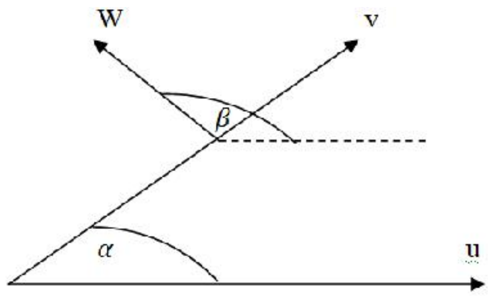
Atau

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0 \qquad (2)$$

(PDP Laplace)

B. Transformasi Sistem Koordinat Segitiga

Ilustrasi sistem koordinat segitiga digambarkan seperti pada gambar 1. :



Gambar 1. Sistem Koordinat Segitiga

Transformasi koordinat dari koordinat Cartesius (x, y) ke dalam koordinat segitiga (u, v, w) diperoleh : (Afandi, 2009)

$$x = u + v\cos\alpha + w\cos\beta \qquad (3)$$
$$y = v\sin\alpha + w\sin\beta \qquad (4)$$

dengan $\alpha, \beta = konstanta$

Transformasi koordinatnya kartesian ke system koordinat segitiga diperoleh berupa matrix sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial xy} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta} & \frac{\sin\beta}{(\cos(\beta-2\alpha)-\cos\beta} & \frac{\sin\alpha}{(\cos(2\beta-\alpha)-\cos\alpha} \\ \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} & \frac{-(2\cos\beta)}{(\cos(\beta-2\alpha)-\cos\beta} & \frac{-(2\cos\alpha)}{(\cos(2\beta-\alpha)-\cos\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial w^2} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Subtitusi hasil transformasi koordinat ke persamaan perpindahan diperoleh :

$$\left(1 + \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \left(\frac{-(2\cos\beta)}{(\cos(\beta-2\alpha)-\cos\beta}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial v} + \left(\frac{-(2\cos\alpha)}{(\cos(2\beta-\alpha)-\cos\alpha}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial w^2} = 0 \qquad (6)$$

Dengan memasukkan beda hingganya diperoleh :

$$a\left(\frac{T_{(u-\Delta u,v,w)} - 2T_{(u,v,w)} + T_{(u+\Delta u,v,w)}}{(\Delta u)^2}\right) + b\left(\frac{T_{(u,v-\Delta v,w)} - 2T_{(u,v,w)} + T_{(u,v+\Delta u,w)}}{(\Delta v)^2}\right) + c\left(\frac{T_{(u,v,w-\Delta w,)} - 2T_{(u,v,w)} + T_{(u,v,w+\Delta w)}}{(\Delta w)^2}\right) = 0 \qquad (7)$$

Persamaan ini diselesaikan dengan mengumpulkan variable-variabel sejenis sehingga muncul koefisien S, yang membentuk persemaan numeric sebagai berikut :

$$S_1 T_{(u-\Delta u,v,w)} + S_2 T_{(u,v,w)} \\ +S_3 T_{(u+\Delta u,v,w)} + S_4 T_{(u,v-\Delta v,w)} \\ +S_5 T_{(u,v+\Delta u,w)} + S_6 T_{(u,v,w-\Delta w,)} \\ +S_7 T_{(u,v,w+\Delta w,)} = 0 \tag{8}$$

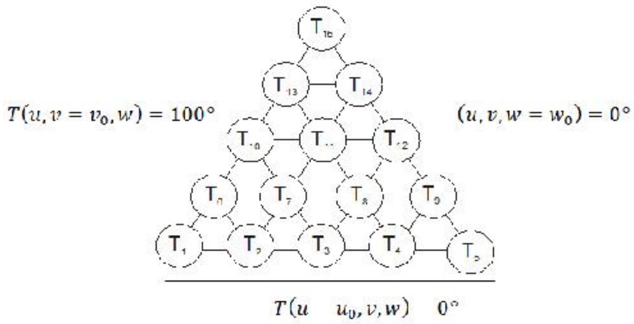
C. Proses Perpindahan Panas

Dari persamaan perpindahan panas yang sudah ditransfomasi ke dalam system koordinat segitiga kemudian dimasukkan nilai-nilai dari $\alpha = 60°, \beta = 120°$ ke persamaan system didapatkan :

$$\frac{2}{3}\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 T}{\partial w^2} = 0 \tag{9}$$

Tahap selanjutnya menentukan syarat batas pada sisi sumbu v yaitu bersuhu $100°$, dan ntuk sisi yang lain u dan w bersuhu 0°.

Perhitungan proses penyebaran panas pada plat segitiga disajikan pada gambar 2.



Gambar 2. Diagram penyebaran panas untuk diskritisasi 7x7x7

Untuk mengetahui sebaran panas dalam pelat segitiga tersebut, maka berdasarkan gambar 2 tersebut selanjutnya dapat dihitung kuantitas panas pada masing masing segmen sebagai berikut :

Penyebaran panas dari titik T_2 sampai T_{11}

$$\Delta T = S_1T_6 + S_2T_7 + S_3T_8 + S_4T_2 + S_5T_{11} + S_6T_3 + S_7T_{10} \tag{10}$$

dimasukkan nilai syarat batasnya diperoleh :

$$S_2T_7 + S_3T_8 + S_5T_{11} = -100(S_1 + S_7) \tag{11}$$

Penyebaran panas dari titik T_3 sampai T_{12}

$$\Delta T = S_1T_7 + S_2T_8 + S_3T_9 + S_4T_3 + S_5T_{12} + S_6T_4 + S_7T_{11} \tag{12}$$

dimasukkan nilai syarat batasnya diperoleh :

$$S_1T_7 + S_2T_8 + S_7T_{11} = 0 \tag{13}$$

Penyebaran panas dari titik T_7 sampai T_{14}

$$\Delta T = S_1T_{10} + S_2T_{11} + S_3T_{12} + S_4T_7 + S_5T_{14} + S_6T_8 + S_7T_{13} \tag{14}$$

dimasukkan nilai syarat batasnya diperoleh :

$$S_2T_{11} + S_4T_7 + S_6T_8 = -100(S_1 + S_7) \tag{15}$$

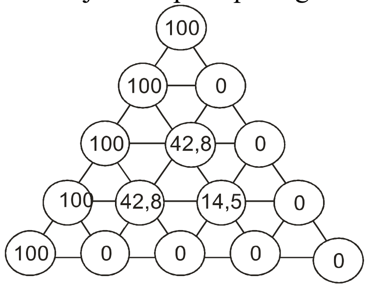
Diketahui bahwa setiap sumbu koordinat segitiga terisi 4 segitiga sama sisi maka diperoleh :

$$\Delta u = \Delta v = \Delta w = \frac{1}{4} \tag{16}$$

Setelah dimasukkan kondisi tersebut koefisien persamaan numeriknya ditemukan yaitu :
$S_1 = 10.67,\ S_2 = -63.99, S_3 = 10.67,\ S_4 = 10.67, S_5 = 10.67,\ S_6 = 10.67, S_7 = 10.67$ (17)

Guna mencari nilai dari T_7, T_8 dan T_{11} melalui matrik $[S][T] = [f(S)]$ sehingga didapat $[T] = [S]^{-1}[f(S)]$ menghasilkan nilai penyebaran panas suhu :
$T_7 = 42{,}89, T_8 = 14{,}5112, T_{11} = 42{,}89$ (18)

Dan ilustrasi penyebaran panas disajikan seperti pada gambar 6 yaitu :



Gambar 3. Diagram penyebaran panas pada diskritisasi 7x7x7 setelah diberi suhu

KESIMPULAN

Kesimpulan penelitian adalah perpindahan panas pada plat logam berbentuk segitiga dengan yang terlebih dahulu mentransformasi persamaan awal dalam system koordinat cartesius ke dalam system koordinat segitiga, dengan diterapkan asumsi-asumsinya serta mengubah parameter yang mengikuti yaitu mengubah jarak antar titik / node $(\Delta u, \Delta v, \Delta w)$ maka tidak terjadi perubahan suhu. Namun dengan merubah parameter sudutnya diperoleh hasil yang menunjukkan semakin besar sudut α maka semakin besar pula perubahan suhunya tetapi semakin besar sudut β semakin kecil perubahan suhunya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih disampaikan kepada seluruh alumni dan seluruh dosen S2 Ilmu Fisik UNS, yang telah banyak memberi kesempatan bagi penulis untuk menimba ilmu.

DAFTAR PUSTAKA

Affandi,J. (2009).’’Komputasi Numerik Pada System Koordinat Sisi Miring’’. Tugas Akhir, Jurusan Matematika ITS. Surabaya.

Hanafi, L. (2006). "Aplikasi metode Beda Hingga Dalam Sistem Koordinat Segitiga ada Persamaan Diferensial Parsial Laplace". Prosiding Seminar Nasional matematika. Surabaya, 25 Nopember. Jurusan Matematika-ITS, Surabaya

Holman,J.P. (1997).’’Heat Transfer’’, Eight Edition, McGraw-Hill Companies, America.

Kreith, F. (2005). “Principles Heat Transfer”, Harper & Row Publisher, University of Colorado, America.

Lam,C. (1994).”Applied Numerical Methods For Partial Differential Equations”, Prentice Hall, Singapore.

Captra, S.C., Canale R.P., 1990, *Numerical Methods for Engineering,* second edition, McGraw-Hill, New York.

Incropera, F.P., et. al., 1981, *Fundamental of Heat Transfer*, John Wiley & Sons, Inc.

James, M.L., et.al., 1993, *Applied Numerical Methods for Digital Computation*, HarperCollins College Publishers.

Kreyszig, E., 1988, *Advance Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc.

Mathew, J.H., Fink, K.D., 2004, *Numerical Methods using Matlab*, fourth edition, Pearson Education, Inc.

Nakhle, H., Asmar, 1985, *Partial Differential Equations*, Prentice-Hall.

Smith, G.D., 1985, *Numerical Solution of Partial Defferential Equations: Finite Difference Methods*, third edition, Oxford University Press.

Supriyono, 2005, *Aplikasi Metode Elemen Hingga untuk Perhitungan Perambatan Panas pada Kondisi Tunak*, Prosiding Seminar Nasional Aplikasi Teknologi Informasi.

Triatmodjo, Bambang, 2002, *Metode Numerik dilengkapi dengan Program Komputer,* Yogyakarta: Beda Offset.