

Model *Joint Economic Lot Size (JELS)* pada Kasus Pemanufaktur-Pembeli dengan Permintaan Probabilistik dan *Lead Time* Variabel

Wakhid Ahmad Jauhari*

Jurusan Teknik Industri Universitas Sebelas Maret Surakarta

Abstract

We consider a two-layer supply chain model consisting of a vendor and a buyer. The buyer observes a probabilistic demand and orders lots from the vendor. We relax the assumption of deterministic lead time and assume that it is varying linearly with the delivery lot size. The vendor manufactures the requested product in production batches. Each produced batch is shipped to the buyer in lots. We consider a situation where there are multiple deliveries for one order and the vendor produces in a multiple integer of delivery quantity and hence, an order can be split into a number of production runs.

A solution procedure is suggested for solving the proposed model and numerical examples are used to illustrate the benefit of integration. Numerical results show that the integrated inventory model will always result in savings in the total joint cost, buyer cost and vendor cost.

Keywords : vendor, buyer, probabilistic demand, delivery lot size, total joint cost

1. Pendahuluan

Pengelolaan persediaan yang dilakukan secara konvensional dipandang sudah tidak cocok lagi dengan kondisi saat ini. Selain sudah tidak sesuai dengan semangat *partnership*, pengelolaan persediaan secara konvensional akan menimbulkan distorsi informasi pada jaringan *supply chain* yang berakibat pada munculnya kerugian pada salah satu pihak dalam *supply chain*. Oleh karenanya diperlukan suatu cara/model pengelolaan persediaan yang dapat mengintegrasikan beberapa pihak dalam *supply chain*.

Saat ini telah berkembang model persediaan yang mengintegrasikan beberapa *tier* dalam *supply chain*. Goyal (1976) merupakan peneliti yang pertama kali mengembangkan model *lot* ekonomis gabungan (*Joint Economic Lot Size*). Dari penelitian yang telah dilakukan Goyal didapatkan hasil bahwa dengan *lot* ukuran ekonomis mampu mengurangi total biaya dalam *supply chain* secara signifikan. Banerjee (1986) mengembangkan model integrasi pemasok-pembeli dimana pemasok memproduksi barang dengan tingkat produksi yang tetap dan menggunakan sistem *lot for lot* guna memenuhi permintaan dari pembeli. Goyal (1988) kemudian memperbaiki model JELS dengan ukuran pengiriman yang sama. Model ini mengasumsikan pengiriman hanya akan dilakukan setelah seluruh *batch* produksi selesai dikerjakan. Kebijakan ini diperbaiki oleh Goyal (1995) dengan merubah ukuran pengiriman dari tetap menjadi bertambah dengan suatu faktor konstan. Hill (1999) mengembangkan model persediaan dengan menetapkan ukuran pengiriman yang bertambah dengan faktor konstan pada saat produksi dan setelah selesai ukuran pengiriman dibuat sama. Pujawan dan Kingsman (2002) mengembangkan model persediaan terintegrasi antara pemasok dengan pembeli. Model ini mengasumsikan bahwa pembeli menginginkan pengiriman dari produsen terjadi dalam n

* Correspondence: wachid_aj@yahoo.com

pengiriman untuk satu kali pemesanan yang dilakukan. Selanjutnya jumlah *batch* produksi merupakan m kali dari ukuran pengiriman.

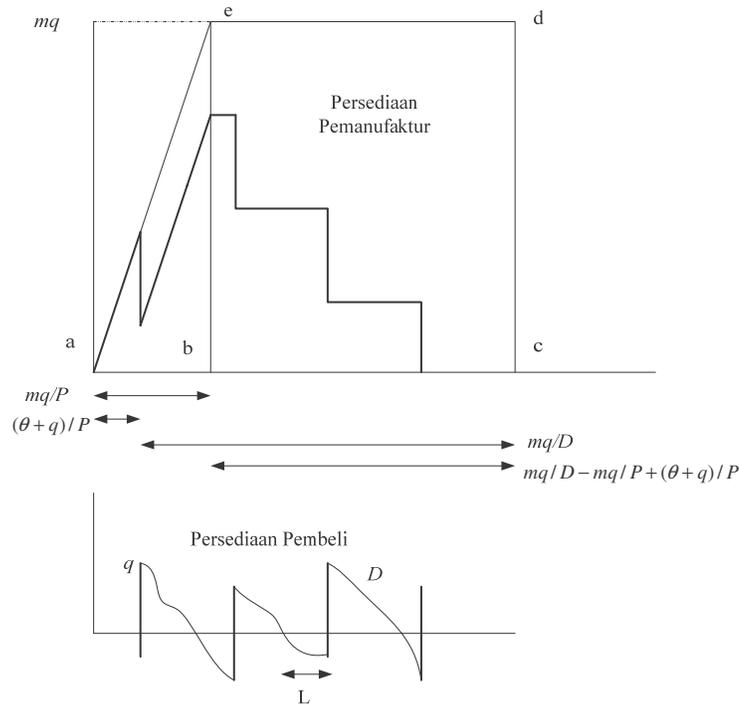
Dari beberapa model persediaan di atas, kecuali model Pujawan dan Kingsman (2002), tidak ada yang mempertimbangkan adanya suatu tingkat kebebasan (*degree of independence*) antara pemasok dan pembeli dalam mengelola persediaan. David dan Eben-Chaime (2003) merupakan peneliti yang menganjurkan diperlukannya suatu tingkat kebebasan dalam penentuan frekuensi pengiriman dan tingkat fleksibilitas dalam penentuan *lot* pemesanan maupun *batch* produksi. Selain itu, beberapa penelitian di atas masih mengasumsikan *lead time* deterministik. Kim dan Benton (1995) mempertimbangkan *lead time* sebagai fungsi linier dari ukuran *lot* pengiriman. Penelitian ini akan mengembangkan model Pujawan dan Kingsman (2002) dengan permintaan probabilistik kemudian mengintegrasikannya dengan model Kim dan Benton (1995) untuk mengubah *lead time* deterministik menjadi suatu variabel.

2. Metode Penelitian

Pada model Pujawan dan Kingsman (2002) setiap *lot* pemesanan dari pembeli dikirim dalam n kali pengiriman sesuai dengan permintaan pembeli. Kemudian pihak manufaktur akan memproduksi sejumlah m kali jumlah yang dikirim. Sehingga *lot* pemesanan pembeli dan *batch* produksi pamanufaktur dapat dirumuskan :

$$Q_b = nq \quad Q_v = mq$$

Pembeli mengelola persediaannya dengan model *continuous review* dengan permintaan diasumsikan mengikuti distribusi normal. Ilustrasi gambar level persediaan produk jadi pada pembeli dan pamanufaktur dapat dilihat pada gambar 1.



Gambar 1. Level Persediaan Pemanufaktur dan Pembeli

Perhitungan total biaya persediaan pada level pembeli dan manufaktur dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$TC_{Pembeli} = \frac{D}{nq}(A + Fn) + h_b \left(\frac{q}{2} + k\sigma\sqrt{pq+b} \right) + \left(\frac{D}{q} \right) \pi\sigma\sqrt{pq+b}\psi(k) \quad (1)$$

$$TC_{Pemanufaktur} = \frac{q}{2} h_v \{ (m-1) - (m-2)Dp \} + \frac{DK}{mq} \quad (2)$$

$$TC_{Gabungan} = TC_{Pembeli} + TC_{Pemanufaktur}$$

$$TC_{Gabungan}(m, q, k) = \frac{D}{nq}(A + Fn) + h_b \left(\frac{q}{2} + k\sigma\sqrt{pq+b} \right) + \left(\frac{D}{q} \right) \pi\sigma\sqrt{pq+b}\psi(k) + \frac{q}{2} h_v \{ (m-1) - (m-2)Dp \} + \frac{DK}{mq} \quad (3)$$

dimana :

D = annual demand

$\frac{1}{p}$ = annual production rate

Q_b = order quantity dari pembeli

Q_v = production quantity dari pemanufaktur

q = delivery quantity

T_p = production cycle

T_d = delivery cycle

ES = ekspektasi terjadinya backorder

K = biaya set up produksi

L = $pq+b$, dimana b adalah delay karena proses transportasi dan proses produksi

A = biaya pemesanan pembeli

F = biaya pengiriman

h_b = biaya penyimpanan produk jadi pada pembeli

h_v = biaya penyimpanan produk jadi pada pemanufaktur

π = backorder cost

n = frekuensi pengiriman

m = nilai perkalian Q_v dari q , bernilai integer

TC_b = total biaya persediaan pada pembeli

TC_v = total biaya persediaan pada pemanufaktur

Penurunan rumus untuk mencari ekspektasi jumlah backorder mengikuti model yang sudah ada pada Tersine (1994) dan Chopra dan Meindl (2001). Besarnya biaya backorder dapat dicari dengan mengalikan biaya per unit backorder (π) dengan ekspektasi jumlah backorder selama kurun waktu tertentu. Misalkan variabel random kontinyu X berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan standar deviasi $\sigma > 0$ maka probability density function dari variabel tersebut dapat dirumuskan :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (4)$$

Jika permintaan selama periode $L(q)$ dirumuskan sebagai $DL(q)$ dengan standar deviasi $\sigma\sqrt{L(q)}$, reorder point dapat dirumuskan sebagai $ROP=DL(q)+SS$. Shortage terjadi ketika permintaan selama kurun waktu $L(q)$ lebih besar dari persediaan ($x>ROP$) sehingga ekspektasi terjadinya shortage per siklus dapat dirumuskan :

$$\begin{aligned}
 ES &= \int_{x=ROP}^{\infty} (x - ROP) f(x) dx \\
 ES &= \int_{x=DL(q)+SS}^{\infty} (x - DL(q) - SS) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{L(q)}} e^{-\frac{(x-DL(q))^2}{2(\sigma\sqrt{L(q)})^2}} dx
 \end{aligned} \quad (5)$$

Dengan mensubstitusikan $z = \frac{(x - DL(q))}{\sigma\sqrt{L(q)}}$ dan $dx = \sigma\sqrt{L(q)}dz$ pada persamaan (5) maka :

$$\begin{aligned}
 ES &= \int_{x=\frac{SS}{\sigma\sqrt{L(q)}}}^{\infty} (z\sigma\sqrt{L(q)} - SS) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \\
 ES &= -SS \int_{z=\frac{SS}{\sigma\sqrt{L(q)}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz + \sigma\sqrt{L(q)} \int_{z=\frac{SS}{\sigma\sqrt{L(q)}}}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz
 \end{aligned} \quad (6)$$

Misalkan $F_s(\cdot)$ adalah *cumulative distribution function* dan $f_s(\cdot)$ adalah *probability density function* untuk distribusi normal standard dengan rata-rata 0 dan standard deviasi 1. Dengan menggunakan persamaan (4) dan definisi dari distribusi normal standard maka akan diperoleh :

$$\begin{aligned}
 1 - F_s(y) &= \int_{z=y}^{\infty} f_s(z) dz \\
 &= \int_{z=y}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz
 \end{aligned} \quad (7)$$

Dengan mensubstitusikan $w = z^2/2$ pada persamaan (7) maka akan diperoleh :

$$\begin{aligned}
 ES &= -SS \left[1 - F_s \left(\frac{SS}{\sigma\sqrt{L(q)}} \right) \right] + \sigma\sqrt{L(q)} \int_{w=\frac{SS^2}{2(\sigma\sqrt{L(q)})^2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w} dw \\
 ES &= -SS \left[1 - F_s \left(\frac{SS}{\sigma\sqrt{L(q)}} \right) \right] + \sigma\sqrt{L(q)} f_s \left(\frac{SS}{\sigma\sqrt{L(q)}} \right) \\
 ES &= \sigma\sqrt{L(q)} \{ f_s(k) - k [1 - F_s(k)] \} \\
 ES &= \sigma\sqrt{L(q)} \psi(k) \\
 ES &= \sigma\sqrt{pq + b} \psi(k)
 \end{aligned} \quad (8)$$

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Variabel Keputusan q

Variabel keputusan q dapat dicari dengan melakukan turunan parsial pertama persamaan (3) terhadap q sama dengan nol. Sehingga nilai q optimal akan diperoleh seperti persamaan (9).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial TC_{Gabungan}(m, q, k)}{\partial q} &= 0 \\
 q^* &= \sqrt{\frac{2D \left(\frac{A}{n} + F \right) + \frac{K}{m} + \pi\sigma\psi(k)\sqrt{pq+b}}{h_b + h_v \{ (m-1) - (m-2)Dp \} + \frac{h_b\sigma p}{\sqrt{pq+b}} \left(k + \frac{\psi(k)}{1 - F_s(k)} \right)}}
 \end{aligned} \quad (9)$$

3.2 Variabel Keputusan k

Variabel keputusan k dapat dicari dengan melakukan turunan parsial pertama persamaan (3) terhadap k sama dengan nol. Sehingga nilai k optimal akan diperoleh seperti persamaan (10)

$$\frac{\partial TC_{Gabungan}(m, q, k)}{\partial k} = 0$$

$$F_s(k) = 1 - \frac{h_b q}{\pi D} \quad (10)$$

3.3 Algoritma Pencarian Solusi

Pencarian solusi terhadap nilai m^* , q^* dan k^* yang dapat meminimumkan total biaya persediaan gabungan dapat dilakukan dengan menggunakan suatu algoritma. Algoritma yang dibuat mengacu pada ide dasar algoritma yang telah dikembangkan oleh Ben-Daya dan Hariga (2004). Kemudian dengan mencari nilai konvergen (q, k) sesuai dengan cara yang telah dikembangkan oleh Ouyang et al. (2004) maka dapat dibuat algoritma baru untuk menyelesaikan model penelitian ini sebagai berikut :

Langkah 0 : Tetapkan $m = 1$ dengan $TC(q_{m-1}^*, k_{m-1}^*, m-1) = \infty$

Langkah 1 : Mulai dengan $q = \sqrt{\frac{2D\left(\frac{A}{n} + F\right) + \frac{K}{m}}{h_b + h_v\{(m-1) - (m-2)Dp\}}}$

Langkah 2 : Gunakan nilai q untuk mendapatkan nilai k dengan persamaan (10)

Langkah 3 : Hitung q dengan persamaan (9)

Langkah 4 : Ulangi langkah 2 sampai 3 hingga nilai q dan k tidak berubah.

Langkah 5 : Tetapkan bahwa $q_m^* = q$ dan $k_m^* = k$ dan hitung $TC(q_m^*, k_m^*, m)$ dengan persamaan (3)

Langkah 6 : Jika $TC(q_m^*, k_m^*, m) \leq TC(q_{m-1}^*, k_{m-1}^*, m-1)$ ulangi langkah 1 sampai 5 dengan $m = m+1$, tetapi jika sebaliknya lanjutkan ke langkah 7

Langkah 7 : Tetapkan $TC(q^*, k^*, m^*) = TC(q_{m-1}^*, k_{m-1}^*, m-1)$ sehingga didapatkan nilai q^* , k^* dan m^* adalah solusi optimal.

3.4 Contoh Numerik dan Pembahasan

Contoh Numerik yang digunakan pada bagian ini mengacu pada Ben-Daya dan Hariga (2004) sebagai berikut :

| | |
|---------------|-------------------------|
| D | = 1000 unit per tahun |
| σ | = 5 unit per tahun |
| $\frac{1}{p}$ | = 3200 unit per tahun |
| K | = 400 per <i>set up</i> |
| A | = 50 per pemesanan |
| F | = 25 per pengiriman |
| h_b | = 5 per unit per tahun |
| h_v | = 4 per unit per tahun |
| π | = 100 per unit |
| B | = 0,01 |

Hasil selengkapnya dari penyelesaian contoh numerik diatas dengan menggunakan algoritma penyelesaian model usulan dapat dilihat pada tabel 1. Dari tabel tersebut terlihat bahwa semakin besar frekuensi pengiriman yang diinginkan pembeli maka akan semakin kecil total biaya persediaan. Hal ini disebabkan oleh menurunnya *lot* pengiriman pamanufaktur yang berakibat pada menurunnya tingkat persediaan pada pembeli. Terlihat pula bahwa peningkatan frekuensi pengiriman juga berakibat pada turunnya *reorder point*. Pada model integrasi pembeli cenderung diuntungkan karena adanya fleksibilitas penentuan frekuensi pengiriman. Sementara itu pamanufaktur cenderung mengalami kerugian akibat tingginya frekuensi pengiriman yang diinginkan oleh pembeli. Oleh karenanya diperlukan suatu mekanisme pengambilan keputusan bersama-sama yang dapat memberikan keuntungan yang berimbang.

Tabel 1. Hasil Numerik *Integrated Model*

| <i>n</i> | <i>m</i> | <i>Lot</i> Pengiriman | <i>Reorder Point</i> | Biaya Pembeli | Biaya Pamanufaktur | Total Biaya |
|----------|----------|-----------------------|----------------------|---------------|--------------------|-------------|
| 1 | 4 | 126,13 | 52,19 | 2140,50 | 1392,0 | 3532,500 |
| 2 | 6 | 88,55 | 40,21 | 1886,50 | 1417,0 | 3303,500 |
| 3 | 6 | 84,904 | 39,05 | 1788,10 | 1422,0 | 3210,100 |
| 4 | 7 | 74,869 | 35,84 | 1729,60 | 1427,7 | 3157,300 |
| 5 | 7 | 73,743 | 35,48 | 1695,20 | 1429,4 | 3124,600 |
| 6 | 8 | 66,689 | 33,22 | 1669,10 | 1433,3 | 3102,400 |
| 7 | 8 | 66,15 | 33,05 | 1651,00 | 1433,9 | 3084,900 |
| 8 | 8 | 65,745 | 32,92 | 1637,30 | 1434,4 | 3071,700 |
| 9 | 8 | 65,427 | 32,82 | 1626,50 | 1434,8 | 3061,300 |
| 10 | 8 | 65,172 | 32,74 | 1617,90 | 1435,2 | 3053,100 |

Tabel 2. Perbandingan *Integrated Model* dengan *Independent model*

| Skenario | Pembeli | | | Pamanufaktur | | Total Biaya |
|--------------------------|----------------------|------------|-------|-----------------------|----------|-------------|
| | <i>Lot</i> Pemesanan | <i>ROP</i> | Biaya | <i>Batch</i> Produksi | Biaya | |
| 1 | 141,85 | 26,74 | 713 | 141,850 | 3014,924 | 3727,924 |
| 2 | 141,85 | 26,74 | 713 | 191,000 | 2356,866 | 3069,866 |
| <i>Integrated</i> (n=10) | 651,72 | 32,74 | 1617 | 521,376 | 1435,2 | 3053,100 |

Perbandingan performansi *integrated model* dengan *independent model* dapat dilihat pada tabel 2. Pada tabel tersebut *integrated model* dibandingkan dengan 2 skenario *independent model*. Pada skenario 1 pembeli menghadapi permintaan dari luar dan menggunakan kebijakan *continuous review*. Pada skenario ini *lead time* diasumsikan sama seperti pada *integrated model*. Kemudian pamanufaktur menggunakan model *EPQ* (*Economic Production Quantity*) dan memproduksi produk sesuai dengan *lot* pembelian pembeli. Pada skenario 2 pembeli menggunakan kebijakan yang sama seperti pada skenario 1, hanya saja pamanufaktur memproduksi produk sesuai dengan kondisi optimalnya.

Pada skenario 1 dan 2 pembeli cenderung menghasilkan biaya yang lebih rendah dibandingkan *integrated model*. Hal ini disebabkan pada kedua skenario tersebut pembeli memesan sejumlah *lot* berdasarkan kondisi optimal pada sisi pembeli saja. Sementara itu pada sisi pamanufaktur biaya yang dihasilkan cenderung lebih besar dibandingkan *integrated model*. Hal ini disebabkan pada *integrated model* pengiriman sejumlah *lot* dapat dilakukan tanpa harus menunggu semua *batch* selesai diproduksi sementara pada *independent model* pengiriman dapat dilakukan setelah keseluruhan *batch* selesai diproduksi. Terlihat bahwa biaya persediaan *supply chain* yang dihasilkan pada *integrated model* lebih kecil dibandingkan *independent model*.

4. Kesimpulan

Dari penelitian ini dapat diambil beberapa kesimpulan, diantaranya :

1. Pengambilan keputusan bersama-sama antara pembeli dan pemanufaktur memberikan dampak penghematan yang signifikan terhadap biaya persediaan. Hal ini bisa dibuktikan dengan lebih rendahnya biaya persediaan pada *integrated model* dibandingkan *independent model* (Skenario 1 dan 2)
2. Sinkronisasi yang baik antara pembeli dan pemanufaktur dalam menentukan dalam menentukan frekuensi pengiriman dan waktu produksi akan menghasilkan penghematan terhadap total biaya persediaan yang cukup signifikan.

Adapun saran yang dapat diberikan guna mengembangkan penelitian ini adalah :

1. Pada model penelitian ini, biaya transportasi masih dipertimbangkan secara implisit ke dalam model. Seharusnya, biaya transportasi dapat dipertimbangkan secara eksplisit dalam model. Dengan menggunakan model *All-unit transportation cost* seperti pada Ertogral, Darwis dan Ben-Daya (2007), maka model penelitian ini dapat dikembangkan menjadi model yang mempertimbangkan biaya transportasi secara eksplisit.
2. Perlu dikembangkan model persediaan yang memungkinkan pembeli dapat mempercepat *lead time (controllable lead time)* pemesanan dengan tambahan biaya tertentu. Hal ini dapat dilakukan dengan mempertimbangkan model yang sudah dikembangkan oleh Pan dan Yang (2002)
3. Model yang telah dibuat dapat dikembangkan untuk kasus : multi pembeli, multi pemasok, dan multi pembeli-multi pemasok.
4. Model yang sudah dibuat belum diintegrasikan dengan pembelian material. Sehingga model yang sudah ada dapat dikembangkan menjadi model persediaan yang melibatkan 3 pihak, yaitu pemasok, pemanufaktur dan pembeli

Daftar Pustaka

- Banerjee, A., (1986), "A joint economic lot size model for purchaser and vendor", *Decision Sciences* 17, 292-311.
- Chan, C. K., dan Kingsman, B. G. (2005), "A Coordinated Single Vendor Multi Buyer Supply Chain Model: Synchronization of Ordering and Production Cycles", Lancaster University, UK.
- Chopra, S. dan Meindl, P. (2001), "Supply Chain Management: Strategy, Planning and Operation", 1st Edition, Prentice Hall.
- David, I. dan Eben-Chaime, M., (2003), "How far should JIT vendor-buyer relationship go?", *International Journal of Production Economic* 81:361-368.
- Goyal, S. K. (1976), "An integrated inventory model for a single supplier – single customer problem", *International Journal of Production Research* 15:107-111
- Goyal S. K., (1988), "Joint economic lot size model for purchaser and vendor: A comment ", *Decision Sciences* 19, 236-241.
- Goyal, S. K., dan Deshmukh, S.G. (1992), "Integrated procurement-production systems: A review", *European Journal of Operational Research* 62:1-10.
- Goyal, S. K., (1995), "A one-vendor multi-buyer integrated inventory model: A comment", *European Journal of Operation Research* 82, 209-210.
- Goyal, S. K., dan Nebebe F., (2000), "Determination of economic production-shipment policy for single-vendor–single-buyer system", *European Journal of perational Research* 121:175-178.

- Goyal, S. K., dan Cardenas-Barron, L. E. (2001), "Note on: 'An optimal batch size for a production system operating under a just-in-time delivery system'", International Journal of Production Economics 72:99.
- Hill, R., (1999), "The optimal production and shipment policy for the single vendor single buyer integrated production-inventory problem", International Journal of Production Research 37, 2463-2475.
- Kim, J. S. dan Benton, W. C., (1995), "Lot size dependent lead times in a (Q,r) inventory system", International Journal of Production Research 33, hal: 41-58.
- Pujawan, I. N., dan Kingsman, B. G. (2002), "Joint optimisation and timing synchronisation in a buyer supplier inventory system", International Journal of Operations and Quantitative Management 8:93-110.
- Tersine, R. J. (1994), "Principles of inventory and material management", Prentice Hall Int. Ed.84.