

PENDEKATAN GEOMETRIS YANG MELIBATKAN SEJARAH MATEMATIKA DALAM PEMBELAJARAN PENYELESAIAN PERSAMAAN KUADRAT

Achmad Dhany Fachrudin¹, Intan Bigita Kusumawati²

^{1,2}STKIP PGRI Sidoarjo

Abstract: The purpose of this research is to develop a set of instructional design, we call it Local Instruction Theory (LIT), of solving quadratic equation based on geometric approach that involving the history of mathematics. In addition, we will describe about how the geometric approach can help students in understanding the concept of solving quadratic equations. This research was conducted at SMPN 1 Krian, Sidoarjo city, Indonesia. The research method used in this research is design research which consists of three main stages, namely preliminary design, teaching experiment, and retrospective analysis. The instructional activities designed to achieve the goal in this research consists of several activities, namely doing a geometric manipulation to solve the problem, Using Babylonian geometry method to solve the problem, and linking the geometry problem with the current algebraic form. From the result of the pilot experiment, in general students can understand the idea of solving quadratic equation through geometry manipulation. However, we found that students with low mathematical ability meet difficulties in achieving the learning objectives until the last activity we designed.

Keywords: *Quadratic Equation; History of Mathematics; Local Instruction Theory; Babylonian Approach.*

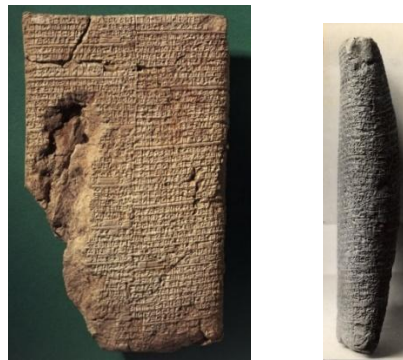
PENDAHULUAN

Berdasarkan Sejarah, telah banyak penemuan-penemuan matematika yang bermanfaat penggunaannya baik secara langsung maupun tidak langsung. Namun, masih sangat sedikit pemanfaatan Sejarah matematika dalam pembelajaran matematika di kelas. Hal tersebut ditunjukkan dengan belum terintegrasinya penggunaan Sejarah dalam kurikulum pendidikan matematika di Indonesia. Padahal jika dikaji secara mendalam, banyak sekali pencapaian besar dalam Sejarah perkembangan konsep matematika yang dapat dimanfaatkan dalam pembelajaran matematika. Siu Man-Keung (1997) menyebutkan bahwa pemanfaatan tersebut dapat berupa anekdot atau cerita dalam Sejarah tersebut, *broad outline* (garis besar yang penting), *content* (materi) dan *development of mathematical ideas* (pengembangan gagasan matematika). Namun, penggunaan Sejarah ini memang tidak secara langsung akan membuat siswa secepat memperoleh nilai yang tinggi, namun membuat pembelajaran matematika lebih bermakna bagi siswa (Siu Man-Keung, 1997).

Beberapa peneliti melalui hasil studinya merekomendasikan penggunaan Sejarah matematika dalam pembelajaran (Fauvel & Van Maanen, 2000; Fauvel, 1991; Radford & Guerette, 2000; Yuste, 2010). Salah satu bentuk pengintegrasian tersebut dapat berupa penggunaan permasalahan dan pemecahannya yang diinspirasi dari Sejarah matematika.

Bahkan, Fauvel (1991) memberikan lima belas alasan pentingnya penggunaan Sejarah matematika dalam pembelajaran. Dengan merangkum alasan tersebut, Fried (2001) menyederhanakan alasan tersebut menjadi tiga hal pokok (1) bahwa sejarah matematika “memanusiakan” matematika, (2) Sejarah matematika membuat matematika lebih menarik dan mudah dipahami, (3) Sejarah matematika dapat memberi wawasan lebih dalam terhadap konsep, masalah dan pemecahan masalah dalam matematika.

Berdasarkan perspektif Sejarah, konsep penyelesaian persamaan kuadrat dibangun berdasarkan landasan geometri (French, 2002; Krantz, 2006; Merzbach & Boyer, 2010). Euclid, dalam *Element*-nya di *book 2* di bagian *Fundamental of Geometric Algebra* (Fitzpatrick, 2007) menjelaskan beberapa pembuktian logis dari dasar-dasar dari *geometric algebra*. Al-Khawarizmi juga menjelaskan pondasi dan pembuktian penyelesaian persamaan kuadrat secara geometris untuk penyelesaian persamaan kuadrat dalam bukunya yang berjudul *Hisob al-jabr wa'l muqabalah* (Krantz, 2006; Merzbach & Boyer, 2010). Bahkan, Secara implisit persamaan kuadrat sudah dikenal pada pada masa Babilonia kuno. Ditunjukkan dengan penemuan naskah atau batu prasati yang tersimpan di British Museum (Gambar 1). Hóyrup (1990) menyebutkan bahwa matematikawan Babilonia pada masa Babilonia kuno (2000 B.C.-1600 B.C.) telah mengenal dan mampu memecahkan permasalahan persamaan kuadrat (walau masih terbatas). Metode yang digunakan para matematikawan Babilonia itu berupa suatu metode yang oleh Hóyrup (1990) disebut sebagai *Naïve Geometry*.



Gambar 1. Naskah Babilonian BM 13901

Sumber Gambar

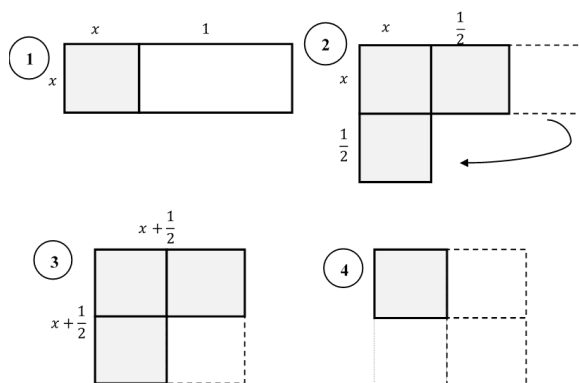
(http://www.britishmuseum.org/research/collection_online/collection_object_details/collection_image_gallery.aspx?partid=1&assetid=324556&objectid=798589)

Berikut salah satu permasalahan paling sederhana yang terdapat pada prasasti BM13901 (yang sudah diterjemahkan), yaitu menemukan panjang sisi dari persegi.

“The surface and my confrontation (the square-line) I have accumulated 45’, I the wāsitum”. You pose. The moiety of 1 you break, 30’ and 30’ you make span. 15’ to 45’ you append: 1 makes 1 equaliteral. 30 which you have made span. In the inside of 1 you tear out: 30’ the confrontation.” (Hóyrup, 1990)

Keterangan: $30' = \frac{1}{2}$, $45' = \frac{3}{4}$, $15' = \frac{1}{4}$

Berikut adalah interpretasi bentuk geometris dan simbol aljabar modern dari permasalahan dan penyelesaiannya (Hóyrup,1990).



Gambar 2. Interpretasi Geometris BM 13901 No.1 (Hóyrup,1990)

Berdasarkan beberapa paparan di atas, peneliti merancang suatu desain pembelajaran melalui pengembangan *Hypothetical Learning Trajectory* (HLT) yang diujikan melalui percobaan mengajar untuk mengetahui bagaimana metode *naïve geometry* dapat membantu pemahaman siswa dalam memahami konsep menyelesaikan persamaan kuadrat.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah desain riset. Tujuan utama dari penelitian ini adalah pengembangan lintasan belajar siswa atau dikenal dengan *learning instruction theory* (LIT) yang dikembangkan melalui tiga tahapan utama yaitu preliminary design, teaching experiment dan retrospective analysis (Gravemeijer & Cobb 2006). Pada tahap preliminary desain, dikembangkan Hypothetical Learning Trajectory (HLT) yang berupa tujuan pembelajaran, aktivitas pembelajaran, dan konjektur pemikiran siswa yang berupa kemungkinan jawaban siswa selama aktivitas pembelajaran berdasarkan desain pembelajaran yang dibuat. Pada tahap kedua atau teaching experiment, terdapat dua sub tahapan yaitu pilot experiment dan teaching experiment. Dalam makalah ini, peneliti hanya akan menjelaskan sampai tahap kedua pada pilot experiment. Dimana tujuan utama dari tahap ini ada uji awal HLT yang telah dikembangkan untuk selanjutnya dilakukan evaluasi dan perbaikan HLT.

Subjek penelitian pada tahap *pilot experiment* dalam penelitian ini adalah enam orang siswa SMPN 1 Krian. Sedangkan pengumpulan data dalam penelitian ini dilakukan melalui dokumentasi video dan foto hasil pekerjaan siswa, *field notes* (catatan lapangan)

dan wawancara. Selanjutnya dilakukan triangulasi untuk menguji apa HLT yang telah dikembangkan dapat berjalan sesuai dengan tujuan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Desain pembelajaran yang dikembangkan oleh peneliti merupakan pembentukan konsep penyelesaian persamaan kuadrat melalui pendekatan geometris yang diinspirasi dari aspek Sejarah. Metode geometris dari Babilonia kuno (metode *naïve geometry*) digunakan sebagai jembatan bagi siswa untuk membentuk pemahaman konsep penyelesaian persamaan kuadrat. Pembelajaran yang dikembangkan dilakukan melalui serangkaian aktivitas pembelajaran, dimana pada tiap aktivitas tersebut siswa akan diberikan permasalahan yang penyelesaiannya dengan metode Sejarah matematikawan Babilonia kuno atau dikenal dengan metode *naïve geometry*.

Dalam hal ini penekanan utama dari desain pembelajaran yang dibuat adalah bagaimana siswa mampu memahami makna dari simbol aljabar dari serangkaian proses penyelesaian persamaan kuadrat melalui manipulasi geometris sebagai bentuk intepretasi dari permasalahan aljabar. Secara umum pembelajaran dilaksanakan melalui serangkaian aktifitas yang memiliki beberapa tujuan. Yang pertama adalah memahami konsep dasar persamaan kuadrat melalui pendekatan geometris. Kedua, membangun model dan memahami bentuk lain dari suatu persamaan kuadra. Ketiga, atau yang terakhir, menemukan hubungan antara proses manipulasi geometri dan simbol umum aljabar. Secara garis besar gambaran dari rangkaian aktivitas tersebut digambarkan pada table 1 di bawah ini.

Tabel 1. Gambaran Umum Pembelajaran Persamaan Kuadrat Melalui Metode Naïve Geometry

Aktivitas	Konsep atau keterampilan yang dibangun
Mengenal metode geometris (<i>naïve geometry</i>)	Memahami prosedur <i>naïve geometry</i> dan membangun pengetahuan tentang aljabar geometris (<i>developing algebraic geometric thinking</i>)
Menggunakan metode <i>naïve geometry</i> untuk menyelesaikan masalah.	Meningkatkan pemahaman tentang <i>naïve geometry</i> dan penggunaannya, secara tidak langsung memahami ekuivalensi bentuk persamaan kuadrat dan memahami konsep faktorisasi dengan melengkapi kuadrat sempurna.
menemukan hubungan antara proses manipulasi geometri dan simbol umum aljabar dan Mengkontruksi rumus persamaan kuadrat	Memahami keterkaitan antara <i>naïve geometry</i> dan persamaan kuadrat (<i>linking between geometry and algebra</i>), membangun konsep menyelesaikan persamaan kuadrat.

Langkah Pembelajaran dan penerapannya pada tahap *pilot experiment*

Pada bagian ini kami akan menjelaskan bagaimana langkah pembelajaran secara terurut berdasarkan background pengetahuan siswa dan kajian teoritis yang telah dilakukan untuk mengenalkan kepada siswa konsep persamaan kuadrat. Langkah pembelajaran ini kami bagi menjadi 3 bagian aktivitas utama.

Mengenal metode geometris (*naïve geometry*)

Pembelajaran dimulai dengan pemberian soal geometri yang diinspirasi dari permasalahan sejarah (*Arithmetica Book I Problem 27* (Radford, 1996)). Berikut adalah permasalahan pertama pada aktivitas 1.

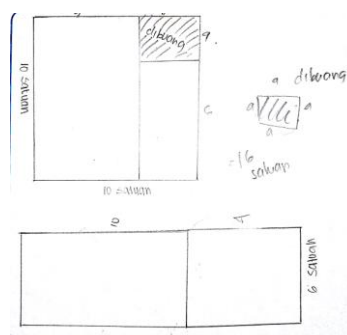
Diberikan sebuah persegi dengan Panjang sisi 10 satuan. Buatlah persegipanjang yang kelilingnya sama (dengan keliling persegi)! Gambarkan hasil pekerjaanmu pada tempat yang disediakan.

Siswa diminta untuk menyelesaikan permasalahan tersebut dengan sebarang metode yang mereka pahami. Rata-rata siswa menyelesaikan permasalahan tersebut dengan metode *trial and error* atau mencoba-coba nilai yang mungkin. Selanjutnya dengan menggunakan alat peraga berupa potongan kertas guru menunjukkan cara penyelesaian dengan menggunakan metode geometris, *Naïve Geometry*, melalui manipulasi bentuk persegi menjadi persegipanjang.

Selanjutnya siswa disajikan permasalahan lanjutan di bawah ini:

Tentukan panjang dan lebar sebuah persegipanjang apabila diketahui luasnya adalah 84 satuan luas dan kelilingnya adalah 40 satuan?

Dengan memecahkan masalah tersebut, siswa memahami bahwa dengan melakukan manipulasi geometris dengan metode *Naïve Geometry*, panjang persegipanjang diperoleh dengan menambahkan sisi persegi terbentuk di awal dengan sisi yang dipotong dari persegi (dibuang untuk mencocokkan area persegi panjang yang diinginkan). Karena sisi persegi yang terbentuk di awal adalah 10 unit dan sisi persegi yang dihilangkan adalah 4 unit, dimensi persegi panjang adalah $10 + 4 = 14$ (panjang) dan $10 - 4 = 6$ (lebar).



Gambar 3. Hasil pekerjaan siswa pada permasalahan 2

Selanjutnya pada bagian terakhir pada aktivitas 1, siswa dihadapkan pada permasalahan yang sama akan tetapi bagian luas yang dihilangkan pada langkah metode geometris bukan berupa persegi (jika dinyatakan dalam bilangan bulat). Pada kasus ini rata-rata siswa belum mampu untuk menyelesaikannya, terkait dengan pemahaman mereka tentang bilangan rasional yang masih belum sempurna.

Menggunakan metode *naïve geometry* untuk menyelesaikan permasalahan. Pada tahap ini siswa dihadapkan pada masalah berikut ini

Diketahui lebar suatu persegipanjang 4 satuan dan panjangnya tidak diketahui. Jika sebuah sisi persegi dihimpitkan pada sisi panjang persegipanjang, luasnya gabungan keduanya menjadi 117 satuan luas, tentukan panjang dari persegipanjang tersebut!

Pada permasalahan ini siswa dihadapkan pada penyelesaian masalah dengan manipulasi geometris yang sama dengan sebelumnya, akan tetapi dengan langkah yang terbalik. Jika sebelumnya mereka melakukan manipulasi bentuk persegi menjadi persegi Panjang, maka kali ini manipulasi yang harus mereka lakukan adalah merubah bentuk persegipanjang menjadi persegi (serupa dengan intepretasi geometri dari BM 1390, gambar 2).

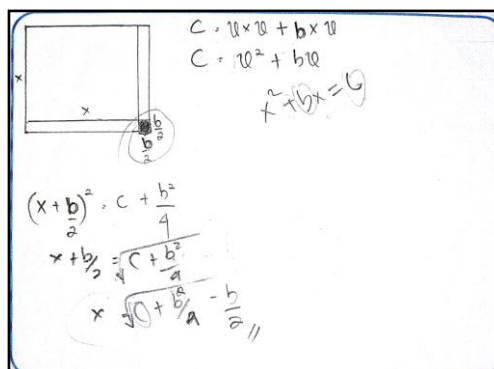
Pada tahap ini penyelesaian siswa sama dengan konjektur pada HLT. Namun, mereka menghadapi kesulitan saat diminta untuk menuliskan secara deskriptif urutan langkah yang mereka lakukan dalam menyelesaikan permasalahan tersebut. Selanjutnya siswa juga diminta untuk mengajukan masalah yang serupa dengan permasalahan yang diberikan. Pada bagian ini tidak semua dapat mengajukan permasalahan dan memberikan jawaban sesuai dengan HLT yang telah dibuat.

Menemukan hubungan antara proses manipulasi geometri dan simbol umum aljabar dan Mengkontruksi rumus persamaan kuadrat, pada bagian terakhir masalah yang disajikan adalah sebagai berikut.

Sebuah persegipanjang yang lebarnya b dan panjangnya x , apabila dihimpitkan dengan persegi yang sisinya x maka luas gabungannya menjadi c satuan luas. Tentukan 1. Bentuk aljabar permasalahan tersebut! 2. nilai x (nyatakan dalam b dan c)!

Ide memberikan masalah ini adalah untuk membangun pemahaman siswa bahwa masalah geometri yang mereka hadapi adalah masalah persamaan kuadrat yaitu $x^2 + bx = c$. Dengan menggunakan *naïve geometry*, bentuk permasalahan tersebut menjadi sederhana $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4}$. sehingga siswa dapat menyatakan bahwa untuk bentuk permasalahan $x^2 + bx = c$ memiliki solusi $x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}$. Siswa mampu

mendapatkan penyelesaian permasalahan dengan metode *naïve geometry* mudah tanpa melibatkan manipulasi aljabar yang rumit.



Gambar 4. Hasil pekerjaan siswa pada aktivitas bagian 3

SIMPULAN DAN SARAN

Pemahaman siswa terhadap konsep penyelesaian persamaan kuadrat dapat dibentuk dengan memberikan permasalahan dan manipulasi geometri. Pada proses pembelajaran melalui aktivitas yang telah dikembangkan, pemahaman siswa berkembang dari tahap informal, yaitu pemahaman pada permasalahan manipulasi bentuk geometri melalui metode *naïve geometry*, menuju pada tahap formal yaitu pada bentuk aljabar persamaan kuadrat dan penyelesaiannya berdasarkan konsep melengkapkan bentuk kuadrat.

Melalui ide manipulasi geometris pada metode *naïve geometry*, mendukung siswa untuk melakukan operasi simbolis yang bermakna karena mereka telah akrab dengan konteks yang dilibatkan, yaitu konteks geometri, daripada permasalahan yang berbentuk simbol aljabar. Namun, dari pelaksanaan kegiatan pembelajaran, ditemukan bahwa hanya siswa dengan kemampuan matematika tinggi yang mencapai belajar objektif sampai tahap terakhir dari tujuan pada aktivitas pembelajaran, yaitu menemukan kembali rumus aljabar umum dalam menyelesaikan persamaan kuadrat.

Secara umum, mengintegrasikan sejarah matematika dalam kegiatan pembelajaran sangat direkomendasikan, dimana hal ini sejalan dengan pernyataan (Fauvel & Van Maanen, 2000; Fauvel, 1991; Radford & Guerette, 2000; Yuste, 2010). Di sisi lain kami merekomendasikan bahwa penelitian serupa akan dilakukan untuk topik pembelajaran lainnya. Semoga, ini dapat membantu dan memperkaya referensi guru dalam menggunakan sejarah matematika dalam pembelajaran.

DAFTAR PUSTAKA

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons.

- Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. For the learning of mathematics, 11(2), 3-6.
- Fauvel, J., & Van Maanen, J. (Eds.). (2000). History in mathematics education. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- French, D. (2002). *Teaching and Learning Algebra*. London: Continuum
- Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science & Education*, 10(4), 391-408.
- Fitzpatrick, R. (2007). *Euclid's Elements of Geometry*. 428 s. ISBN 978-0-6151-7984-1.
- Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. *Educational design research*, 17-51.
- Hóyrup, J. (1990b). Algebra and naive geometry. An investigation of some basic aspects of old babylonian mathematical thought II. *Altorientalische Forschungen*, 17, 262-254.
- Keung, S. M. (2000). The ABCD of Using History of Mathematics in the (Undergraduate) Classroom. In Katz, V. (Ed), *Using history to teach mathematics: an international perspective* (pp. 69-75). USA: The Mathematical Association of America.
- Krantz, S. G. (2006). *An Episodic History of Mathematics: Mathematical Culture through Problem Solving*. Mathematical Association of America.
- Radford, L. (1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: Historical remarks from a didactic perspective. In *Approaches to algebra* (pp. 39-53). Springer Netherlands.
- Radford, L. & Guerette, G. (2000). Second degree equations in the classroom: a Babylonian approach. In Katz, V. (Ed), *Using history to teach mathematics: an international perspective* (pp. 69-75). USA: The Mathematical Association of America.
- Yuste, P. (2010). Learning mathematics through its history. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 2(2), 1137-1141.