Journal of Mathematics and Mathematics Education
https://jurnal.uns.ac.id/jmme

*p-ISSN 2089-8878; e-ISSN 2715-8276*
*Vol. 10, No. 1, June 2020*

# NILAI KEKUATAN TAK TERATUR JARAK NON INKLUSIF TITIK PADA GRAF TADPOLE DAN GRAF LINTASAN KORONA LINTASAN

## On Non-Inclusive Distance Vertex Irregularity Strength of Tadpole and Path Corona Path Graphs

**Muhammad Bilal [1*], Diari Indriati [2], Vika Yugi Kurniawan [3]**

[1,2,3]Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret, Jl. Ir. Sutami No.36, Kentingan, Kec. Jebres, Kota Surakarta, Jawa Tengah 57126

*korespondensi, tel/fax : 0812-25069472, email: muhammadxbilal25@gmail.com

**Abstrak:** Misal $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif pada graf $G$ dengan himpunan titik tak kosong $V$ adalah pemetaan $\lambda: (V, G) \longrightarrow \{1,2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga bobot untuk semua titiknya berbeda. Bobot dari titik $v$ pada graf $G$ dengan pelabelan $\lambda$, dinotasikan dengan $wt(v)$, didefinisikan sebagai jumlahan label dari semua titik yang *adjacent* dengan $v$ (jarak satu dengan $v$. Nilai kekuatan tak teratur jarak non inklusif titik dari graf $G$ dinotasikan dengan $dis(G)$, adalah nilai terkecil dari label terbesar $k$ sehingga $G$ memiliki pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif. Pada penelitian ini, ditentukan $dis(G)$ dari graf $T_{m,n}$ dengan $m \geq 3$, $m$ ganjil, dan $n \geq 1$ dan graf $P_n \odot P_n$ dengan $n \geq 2$ dan $n$ genap.

**Kata kunci** : *Pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif, Nilai kekuatan tak teratur jarak non inklusif titik, Graf tadpole, Graf lintasan korona lintasan*

**Abstract:** Let $G = (V, E)$ be a connected and simple graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. A non-inclusive distance vertex irregular labeling of a graph $G$ is a mapping of $\lambda: (V, G) \longrightarrow \{1,2, \dots, k\}$ such that the weights calculated for all vertices are distinct. The weight of a vertex $v$, under labeling $\lambda$, denoted by $wt(v)$, is defined as the sum of the label of all vertices adjacent to $v$ distance 1 from $v$). A non-inclusive distance vertex irregularity strength of graph $G$, denoted by $dis(G)$, is the minimum value of the largest label $k$ over all such non inclusive distance vertex irregular labeling. In this research, we determined $dis(G)$ from $T_{m,n}$ graph with $m \geq 3$, $m$ odd, and $n \geq 1$ and $P_n \odot P_n$ graph with $n \geq 2$ and $n$ even.

**Keywords :** *Non inclusive distance irregular labeling, Non-inclusive distance vertex irregularity strength, Tadpole graph, Path corona path graph*

## PENDAHULUAN

Matematika merupakan kunci pokok dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Konsep matematika banyak digunakan sebagai alat bantu dalam penerapan- penerapan bidang ilmu lain maupun dalam pengembangan matematika itu sendiri. Salah satu cabang ilmu matematika adalah teori graf. Teori graf merupakan cabang kajian ilmu matematika yang digunakan sebagai alat bantu untuk

Accepted: February 2, 2020 Approved: March 21, 2020 Published: June 20, 2020
DOI: 10.20961/jmme.v10i1.42405

menggambarkan atau menyatakan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti. Bidang penelitian dalam teori graf terus berkembang salah satunya adalah pelabelan graf.

Menurut Wallis (2001), pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memetakan elemen suatu graf ke bilangan bulat positif atau non negatif. Jenis pelabelan graf dibagi menjadi pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif termasuk dalam pelabelan titik. Pelabelan graf menjadi pelabelan *magic*, yaitu pelabelan *magic* dari graf $G$ didefinisikan sebagai suatu pemetaan satu-satu $\lambda$ dari $E$ ke suatu himpunan bilangan bulat positif sehingga untuk semua sisi yang *incident* dengan titik adalah konstan (Sedlack,1067). Pelabelan *magic* dikembangkan menjadi pelabelan pelabelan total sisi-magic dan pelabelan total titik-magic. Pelabelan total sisi-magic yang dikenalkan oleh Kotzig dan Rosa (1970) adalah pelabelan yang didefinisikan sebagai pelabelan titik-titik dan sisi-sisi dimana label sisi dan dua titik akhir adalah konstan. Sedangkan pelabelan total titik-magic dikenalkan oleh MacDougall *(2002)*. Pelabelan tersebut adalah pelabelan yang didefinisikan sebagai penempatan bilangan bulat dari 1 ke $v + e$ ke titik dan sisi $G$ sehingga pada setiap titik, label titik dan label sisi *incident* pada titik tersebut ditambahkan konstanta tetap. Selain itu, pelabelan graf berdasarkan *magic* bahwa bobot 1-titik dari setiap titik $x$ dalam $G$ di bawah pelabelan titik didefinisikan sebagai jumlah label titik dari titik-titik yang *adjacent* dengan $x$ (yaitu jarak 1 dari $x$). Jika semua titik dalam $G$ memiliki bobot $k$ yang sama, maka disebut pelabelan titik 1-titik-magic (Miller, 2003).

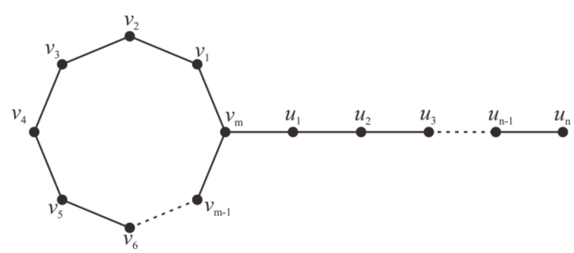
Jenis lain dari pelabelan graf adalah pelabelan tak teratur. Gagasan pelabelan ini diperkenalkan oleh Chartrand (1998). Gagasan ini mengusulkan masalah, yaitu berapa nilai minimum dari label terbesar dari pelabelan tidak beraturan tersebut jika sisi-sisi dari graf terhubung sederhana yang diberi label bilangan bulat positif sehingga graf menjadi tidak beraturan, yaitu bobot pada setiap titiknya berbeda. Nilai minimum label terbesar disebut nilai kekuatan tak teratur dari graf. Dengan pelabelan yang serupa, tetapi berlaku untuk kedua sisi dan titik pada graf, (Bača,2007) mengenalkan pelabelan-k total tak teratur. Untuk graf $G = (V, E)$ dengan himpunan titik $V$ dan himpunan sisi $E$, pelabelan-k total didefinisikan dengan $\lambda: V \cup E \rightarrow 1,2, \dots, k$. Pelabelan-k total didefinikan sebagai pelabelan-k sisi tak teratur dan pelabelan-k titik tak teratur. Minimum k dimana graf $G$ memiliki pelabelan-k sisi tak teratur disebut nilai kekuatan tak teratur sisi pada graf $G$, $tes(G)$. Demikian pula untuk pelabelan-k titik tak teratur, minimum $k$ tersebut disebut nilai kekuatan tak teratur titik pada graf $G, tes(G)$ (Bača, 2007).

Kemudian Slamin (2010) menggabungkan ide dari pelabelan *magic* dan pelabelan tak teratur tersebut menjadi pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif. Pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif pada graf $G$ dengan himpunan titik $V$ adalah $\lambda: V \longrightarrow \{1,2, \dots, k\}$ dengan bobot yang dihitung pada setiap titik harus berbeda. Bobot titik $v$ di graf $G$ didefinisikan sebagai jumlah label semua titik yang *adjacent* dengan $v$ (berjarak satu dengan $v$). Slamin (2010) menyebutkan bahwa *distance irregularity strength* atau dapat disebut dengan nilai kekuatan tak teratur jarak dari graf $G$, dinotasikan dengan $dis(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil dari label terbesar yang digunakan dalam pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif.Graf yang sudah diteliti oleh Slamin (2010) adalah graf lengkap, graf lintasan, graf siklus, dan graf roda. Sedangkan graf yang sudah diteliti oleh Bong (2017) adalah graf siklus, graf roda, graf *friendship*, dan graf *m-book*. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan diteliti graf yang belum diteliti dalam pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif, yaitu graf tadpole $(T_{m,n})$ dan graf lintasan korona lintasan $(P_n \odot P_n)$.

## METODE PENELITIAN

*Nilai Kekuatan Tak Teratur Jarak Non Inklusif Titik pada Graf Tadpole*

Menurut Gallian (2017), graf tadpole $T_{m,n}$ adalah graf yang terdiri dari graf siklus yang mempunyai titik sebanyak $m$ dengan tambahan sebuah $n$ sisi lintasan (ekor) yang *incident* pada salah satu titik pada siklus tersebut. Suatu graf tadpole mempunyai $m + n$ titik dan $m + n$ sisi. Secara umum graf tadpole dapat dilihat pada Gambar 1.




Gambar 1. Graf tadpole $T_{m,n}$

**Teorema 3.1.** Misal graf $T_{m,n}$ adalah graf tadpole dengan $m \geq 3$, $m$ ganjil, dan $n \geq 1$, maka

$$dis(T_{m,n}) = \left\lceil \frac{m+n}{4} \right\rceil + \left\lfloor \frac{m+n}{4} \right\rfloor \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3.1)$$

*Bukti*. Dibuktikan bahwa $dis(T_{m,n}) \geq (3.1)$ dan selanjutnya dibuktikan bahwa $dis(T_{m,n}) \leq (3.1)$ untuk $m \geq 3$, $m$ ganjil, dan $n \geq 1$. Himpunan titik graf $T_{m,n}$ adalah $V(T_{m,n}) = \{v_i: 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_j: 1 \leq j \leq n\}$.

a. Ditunjukkan bahwa $dis(T_{m,n}) \geq (3.1)$ untuk $m \geq 3$, $m$ ganjil, dan $n \geq 1$

   Diandaikan $dis(T_{m,n}) < (3.1)$ untuk $m \geq 3$, $m$ ganjil, dan $n \geq 1$. Misalkan titik yang *adjacent* dengan titik yang ber-*degree* 1, yaitu titik $v_2$ diberi label 1. Kemudian semua titik yang *adjacent* dengan titik yang ber-*degree* 2 diberi label secara terurut dari 1 sampai (3.1) – 1 sedemikian sehingga tiap titiknya memiliki bobot yang berbeda. Hal tersebut berarti memenuhi $dis(T_{m,n}) <$

(3.1). Berdasarkan persamaan (3.2), jika diambil label titik dari $u_i$ adalah $(3.1) - 1$, sebagai label terbesar, maka bobot titik $u_i - 1$ dan $u_i + 1$ akan sama. Pada pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif, setiap titik harus memiliki bobot yang berbeda, berarti pengandaian salah. Benar untuk $dis(T_{m,n}) \geq (3.1)$.

b. Dibuktikan bahwa $dis(T_{m,n}) \leq (3.1)$ untuk $m \geq 3$, $m$ ganjil, dan $n \geq 1$

Dimisalkan $k = (3.1)$. Selanjutnya, didefinisikan pemetaan $\lambda: V(G) \longrightarrow \{1,2, \dots, k\}$. Pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif pada graf tadpole adalah sebagai berikut.

$$\lambda(v_j) = \left\lceil \frac{j}{4} \right\rceil + \left\lfloor \frac{j}{4} \right\rfloor, \text{untuk } 1 \leq j \leq n$$

$$\lambda(u_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 2 + 2\left(\frac{i-4}{4}\right), \text{untuk } i \equiv 0 \bmod 4 \\ \left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1 + 2\left(\frac{i-2}{4}\right), \text{untuk } i \equiv 2 \bmod 4 \\ 2\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1 + 2\left\lfloor \frac{m-i}{4} \right\rfloor, \text{untuk } i \equiv (1,3) \bmod 4, n \equiv 0 \bmod 4 \\ 2\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 2\left\lceil \frac{m-i}{4} \right\rceil - 1, \text{untuk } i \equiv (1,3) \bmod 4, n \equiv 2 \bmod 4 \\ n + \frac{m-n}{2} - \frac{i-1}{2}, \text{untuk } i \equiv (1,3) \bmod 4, n \equiv (1,3) \bmod 4 \end{cases}$$

$$\lambda(u_m) = \left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3.2)$$

Label titik dikonstruksikan sebagai $\lambda(u_i): 1 \leq i \leq m$ dan $\lambda(v_j): 1 \leq j \leq n$. Berdasarkan pengkonstruksian label, dapat dilihat bahwa fungsi $\lambda$ adalah pemetaan yang membawa $V(T_{m,n})$ ke $\{1,2, \dots, k\}$. Dengan demikian, $\lambda$ adalah pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif dengan $k = (3.1)$. Selanjutnya, dihitung bobot masing-masing titik seperti berikut

$$wt(v_j) = j, \text{untuk } 1 \leq j \leq n$$

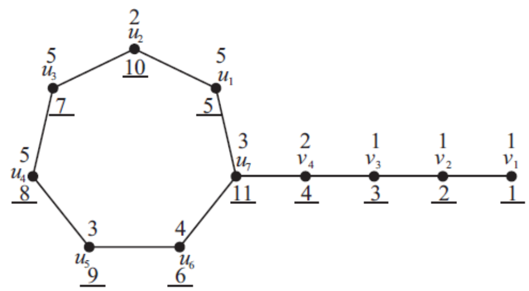
$$wt(u_i) = \begin{cases} i + n, \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ m + n + 1 - i, \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$wt(u_m) = \begin{cases} m + n + 1 + 2\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{(m+1) \bmod 4}{2} - m \bmod 4, \text{untuk } n \equiv 0 \bmod 4 \\ m + n + 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \frac{(m-1) \bmod 4}{2}, \text{untuk } n \equiv 2 \bmod 4 \\ m + n + 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \frac{(m+1) \bmod 4}{2}, \text{untuk } n \equiv (1,3) \bmod 4 \end{cases}$$

Persamaan.................(3.3)

Dapat dilihat bahwa bobot masing-masing sisi dari $T_{m,n}$ di bawah pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif $\lambda$, yaitu bilangan bulat berurutan dari 1 sampai $\lambda(v_n) + \lambda(u_1) + \lambda(u_m)$. Artinya, bobot masing-masing titik berbeda sehingga diperoleh pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif dari $T_{m,n}$ dengan label terbesar adalah $k = (3.1)$. Dengan demikian terbukti $dis(T_{m,n}) = (3.1)$ untuk $m \geq 3$, $m$ ganjil, dan $n \geq 1$.

Jadi, diperoleh pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif dengan $k = (3.1)$. Dari a dan b diperoleh $dis(T_{m,n}) = (3.1)$ untuk $m \geq 3$, $m$ ganjil, dan $n \geq 1$.

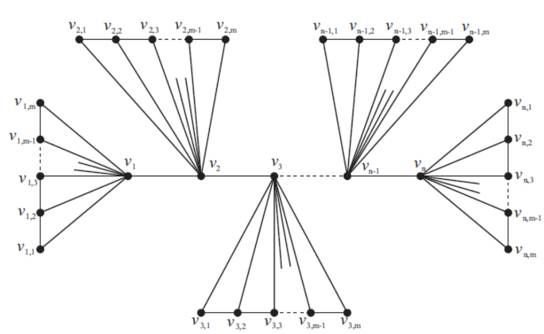



Gambar 2. Pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif pada graf $T_{7,4}$

Berdasarkan Gambar 2 pelabelan setiap titik ditunjukkan dengan bilangan berwarna hitam dan bobot setiap titik ditunjukkan dengan bilangan berwarna hitam bergaris bawah sehingga diperoleh bobot setiap titik berbeda dan nilai kekuatan tak teratur jarak non inklusif titik dari graf $T_{7,4}$ yaitu $dis(T_{7,4}) = 5$.

*Nilai Kekuatan Tak Teratur Jarak Non Inklusif Titik pada Graf Lintasan Korona Lintasan*

Menurut Fruncht dan Harary (1970), korona dari graf lintasan $P_n$ dengan graf lintasan $P_m$, dinotasikan $P_n \odot P_m$ adalah graf yang terbentuk dari graf $P_n$ dan $n$ kopi graf $P_m$, kemudian menghubungkan setiap titik dari $V(P_n)$ dengan sebuah sisi ke setiap titik dari $V(P_m)$. Suatu graf lintasan korona lintasan memiliki $mn + n$ titik dan $n(2m - 1) + n - 1$ sisi. Secara umum graf lintasan korona lintasan dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf lintasan korona lintasan $P_n \odot P_m$

**Teorema 3.2.** Misal graf $P_n \odot P_n$ adalah graf lintasan korona lintasan dengan $n \geq 2$, $n$ genap, maka

$$dis(P_n \odot P_n) = \frac{n^2 + (n \, mod \, 4)}{2} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3.4)$$

*Bukti.* Ditunjukkan bahwa $dis(P_n \odot P_n) \geq (3.4)$ dan selanjutnya dibuktikan bahwa $dis(P_n \odot P_n) \leq (3.4)$ untuk $n \geq 2$ dan $n$ genap. Himpunan titik graf $P_n \odot P_n$ adalah $V(P_n \odot P_n) = \{v_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{i,j} : 1 \leq i, j \leq n\}$.

a. Ditunjukkan bahwa $dis(P_n \odot P_n) \geq (3.4)$ untuk $n \geq 2$ dan $n$ genap.

Diandaikan $dis(P_n \odot P_n) < (3.4)$ untuk $n \geq 2$ dan $n$ genap. Misalkan titik yang *adjacent* dengan titik yang ber-*degree* 2, yaitu titik $v_{i,2}, v_{i,n-1}$ dan $v_i$ diberi label secara terurut dari 1 sampai $(3.4) - 1$ sedemikian sehingga tiap titiknya memiliki bobot yang berbeda. Kemudian semua titik yang *adjacent* dengan titik yang ber- *degree* 3 diberi label secara terurut dari 1 sampai $(3.4) - 1$ sedemikian sehingga tiap titiknya memiliki bobot yang berbeda. Hal tersebut berarti memenuhi $dis(P_n \odot P_n) < (3.4)$. Berdasarkan persamaan (3.5), jika diambil label titik dari $v_{i,n-2}$ dan $v_{\left(\frac{n}{2}+1\right),n}$ akan sama. Pada pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif, setiap titik harus memiliki bobot yang berbeda, berarti pengandaian salah. Benar untuk $dis(P_n \odot P_n) < (3.4)$.

b. Ditunjukkan bahwa $dis(Pn \odot Pn) \leq (3.4)$ untuk $n \geq 2$ dan $n$ genap.

Dimisalkan $k = (3.4)$. Selanjutnya didefinisikan pemetaan $\lambda : V(G) \longrightarrow \{1,2,\ldots,k\}$. Pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif pada graf lintasan korona lintasan adalah sebagai berikut.

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} 2i - 1, \text{untuk } i \leq \frac{n}{2} \\ 2(n - i + 1), \text{untuk } i > \frac{n}{2} \end{cases}$$

$$\lambda(v_{i,j}) = \begin{cases} \frac{jn}{2}, \text{untuk } n \equiv 0 \; mod \; 4, j \equiv 0 \; mod \; 4 \\ \frac{n}{2}(n - j + 1), \text{untuk } n \equiv 0 \; mod \; 4, j \equiv 1 \; mod \; 4 \\ 2i + \frac{n}{2}(j - 2) - 1, \text{untuk } n \equiv 0 \; mod \; 4, j \equiv 2 \; mod \; 4, i \leq \frac{n}{2} \\ 2(n - i + 1) + \frac{n}{2}(j - 2), \text{untuk } n \equiv 0 \; mod \; 4, j \equiv 2 \; mod \; 4, i > \frac{n}{2} \\ 2i + \frac{n}{2}(n - j - 1), \text{untuk } n \equiv 0 \; mod \; 4, j \equiv 3 \; mod \; 4, i \leq \frac{n}{2} \\ 2(n - i) + \frac{n}{2}(n - j - 1) + 3, \text{untuk } n \equiv 0 \; mod \; 4, j \equiv 3 \; mod \; 4, i > \frac{n}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{jn}{2}, \text{untuk } n \equiv 2 \ mod\ 4, j \equiv 0 \ mod\ 4 \\ 2i + \frac{n}{2}(n-j-1), \text{untuk } n \equiv 2 \ mod\ 4, j \equiv 1 \ mod\ 4, i \leq \frac{n}{2} \\ 2(n-i) + \frac{n}{2}(n-j-1) + 3, \text{untuk } n \equiv 2 \ mod\ 4, j \equiv 1 \ mod\ 4, i > \frac{n}{2} \\ 2i + \frac{n}{2}(j-2) - 1, \text{untuk } n \equiv 2 \ mod\ 4, j \equiv 2 \ mod\ 4, i \leq \frac{n}{2} \\ 2(n-i+1) + \frac{n}{2}(j-2), \text{untuk } n \equiv 2 \ mod\ 4, j \equiv 2 \ mod\ 4, i > \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2}(n-j-1), \text{untuk } n \equiv 2 \ mod\ 4, j \equiv 3 \ mod\ 4 \\ 4i + n(n-j) - 1, \text{untuk } j \equiv 0 \ mod\ 2, i \leq \frac{n}{2} \\ 4(n-i) + n(n-j) + 5, \text{untuk } j \equiv 0 \ mod\ 2, i > \frac{n}{2} \\ 4i + n(j-1) - 2, \text{untuk } j \equiv 1 \ mod\ 2, i \leq \frac{n}{2} \\ 4(n-i+1) + n(j-1), \text{untuk } j \equiv 1 \ mod\ 2, i > \frac{n}{2} \end{cases}$$

Persamaan………………(3.5)

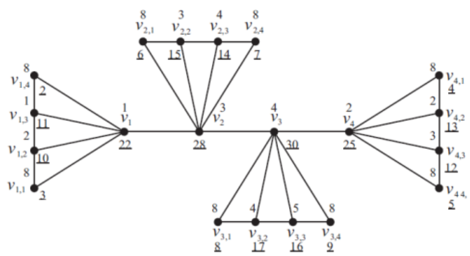
$$wt(v_i) = \begin{cases} \frac{n}{4}(n^2+3) + 3, \text{untuk } n \equiv 0 \ mod\ 4, i \equiv 1 \\ \frac{n}{4}(n^2+3) + n(i-1) + 2(2i-1) - \left\lfloor \frac{2i}{n} \right\rfloor, \text{untuk } n \equiv 0 \ mod\ 4, 1 \leq i \leq \frac{n}{2} \\ \frac{n}{4}(n^2+5) + (n-i)(n+4) + 3\left\lceil \frac{2(i-1)}{n} \right\rceil - 2, \text{untuk } n \equiv 0 \ mod\ 4, i \geq \frac{n}{2} \\ (n^2+2n)(n-2) + 3(n+6), \text{untuk } n \equiv 2 \ mod\ 4, i = 1 \\ \left(\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}\right)(n-2) + (n+2)\left(i - \frac{1}{4}\right) + 4i - 2, \text{untuk } n \equiv 2 \ mod\ 4, 1 \leq i \leq \frac{n}{2} \\ \left(\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}\right)(n-2) + \left(n - i + \frac{5}{4}\right)(n+2) + 4(n-i+1) + 3\left\lceil \frac{2(i-1)}{n} \right\rceil - 6, \\ \text{untuk } n \equiv 2 \ mod\ 4, i \geq \frac{n}{2} \end{cases}$$

Persamaan………………(3.6)

Label titik dikonstruksikan sebagai $\lambda(v_{i,j}): 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ dan $\lambda(v_i): 1 \leq i \leq n$. Berdasarkan pengkonstruksian label, dapat dilihat bahwa fungsi $\lambda$ adalah pemetaan yang membawa $V(P_n \odot P_n)$ ke $\{1,2, \ldots, k\}$. Dengan demikian, $\lambda$ adalah pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif dengan $k = (3.4)$. Selanjutnya, dihitung bobot masing-masing titik pada graf lintasan korona lintasan dengan $n \geq 2$ dan $n$ genap seperti persamaan (3.6).

Dapat dilihat bahwa bobot masing-masing sisi dari $P_n \odot P_n$ di bawah pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif $\lambda$, yaitu bilangan bulat berurutan dari 2 sampai $\lambda(v_{i,j}) + \lambda(v_{i-1}) + \lambda(v_{i+1})$. Artinya, bobot masing-masing titik berbeda sehingga diperoleh pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif dari $P_n \odot P_n$ dengan label terbesar adalah $k = (3.4)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $dis(Pn \odot Pn) \leq (3.4)$ untuk $n \geq 2$ dan $n$ genap ( Kotzig & Rosa, 1970).

Jadi, diperoleh pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif dengan $k$ = (3.4). Dari a dan b diperoleh $dis(Pn \odot Pn)$ = (3.4) untuk $n \geq 2$ dan $n$ genap. Gambar 4 menunjukkan pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif pada graf lintasan korona lintasan $P4 \odot P4$.



Gambar 4. Pelabelan titik tak teratur jarak non inklusif pada graf $P4 \odot P4$

Berdasarkan Gambar 4 pelabelan setiap titik ditunjukkan dengan bilangan berwarna hitam dan bobot setiap titik ditunjukkan dengan bilangan berwarna hitam bergaris bawah sehingga diperoleh bobot setiap titik berbeda dan nilai tak teratur jarak non inklusif titik dari graf $P4 \odot P4$ yaitu $dis(P4 \odot P4)$ = 8.

## SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut. 1) Nilai kekuatan tak teratur jarak non inklusif titik dari graf tadpole adalah $dis(T_{m,n}) = \left\lceil \frac{m+n}{4} \right\rceil + \left\lfloor \frac{m+n}{4} \right\rfloor$ dengan $m \geq 3$, $m$ ganjil, dan $n \geq 1$. Nilai kekuatan tak teratur jarak non inklusif titik dari graf lintasan korona lintasan adalah $dis(P_n \odot P_n) = \frac{n^2+(n \bmod 4)}{2}$ dengan $n \geq 2$ dan $n$ genap.

Saran bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini, dapat mengembangkan penelitian ini dengan menentukan nilai kekuatan tak teratur jarak non inklusif titik pada graf tadpole $T_{m,n}$ dengan $m$ genap dan graf lintasan korona lintasan $Pn \odot Pn$ dengan $n$ ganjil, atau graf lintasan korona lintasan $Pn \odot Pm$ secara umum.

## REFERENSI

Bača, M., S. Jendrol', M. Miller, and J. Ryan. (2007). On Irregular Total Labeling. *Discrete Mathematics*. 307, 1378-1388.

Bong, N.H. and L. Yuqing. (2017). On Distance-Irregular Labelings of Cycles and Wheels. *Australasian Journal of Combinatorics*. 69(3), 315-322.

Chartrand, G., M.S. Jacobson, J. Lehel, O.R. Oellerman, S. Ruiz, and F. Saba. (1998). Irregular Networks. *Congr. Numer*. 64, 187-192.

Fruncth and F. Harary. (1970). *On The Corona of Two Graphs*, Aequationes Math 4, 322-325.

Gallian, J.A. (2017). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 20(6), 1-432.

Kotzig, A. and A. Rosa. (1970). *Magic Valuations of Finite Graphs*. Canada: Math. Bull.

MacDougall, J.A., M. Miller, Slamin, and W.D. Wallis. (2002). Vertex-Magic Total Labelings of Graphs, *Util. Math.* 61, 3-21.

Miller, M., C. Rodger, and R. Simanjuntak. (2003). Distance Magic Labelings of Graphs. *Aurstralas. J. Combin*. 28, 305-315.

Sedláčk, J. (1963). *Theory of Graphs and Its Applications*, Prague: House Czechoslovak Acad. Sci.

Slamin. (2017). On Distance Irregular Labelling of Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 102, 919-932.

Wallis, W.D. (2001). *Magic Graph*, Berlin: Birkhäuser.