Journal of Mathematics and Mathematics Education *ISSN: 2089-8878*
Vol.8, No.1, hal 31-45 Juli 2018 *https://jurnal.uns.ac.id/jmme*

DEKOMPOSISI GRAF HELM

Risti Dwi Rahayu[1], Yemi Kuswardi[2]

[1,2]Prodi Pendidikan Matematika, FKIP, UNS

Abstract: Decomposition of graph G is a collection of {Hi} from sub graph G until Hi = 〈Ei〉 for Ei subset E (G) and {Ei} is partitions of E (G). If {Hi} is a decomposition of G, it can be written as the addition of the sides $\boldsymbol{H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus \ldots \oplus H_n}$and G is decomposed into sub graphs $\boldsymbol{H_1, H_2, H_3, H_4, \ldots, H_n}$where n = |{Hi}|. In other words, $\boldsymbol{G = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus \ldots \oplus H_n}$is the decomposition of graph G. Helm Hn graph with n ≥ 3 and n is even number which can be partitioned into sub graph $\boldsymbol{A_i = \langle E_i \rangle}$ which is in the form of $2K_2$, where Hn = $\boldsymbol{H_n = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus \ldots \oplus A_{\frac{3}{2}n}}$. So, helmet Hn graph with n ≥ 3 and n is an even number of $2K_2$-decomposition. The Hn helm graph with n > 3 can be partitioned into sub graph Ai = 〈Ei〉 which is in the form of $3K_2$, where $\boldsymbol{H_n = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus \ldots \oplus A_n}$. So that the Hn helm graph with n > 3 is $3K_2$-decomposition.
Keywords:*Decomposition, Helm Graph.*

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah lama berkembang dan memiliki banyak terapan sampai saat ini. Masalah jembatan Konigsberg adalah masalah yang pertama kali diselesaikan menggunakan graf. Pada tahun 1736, seorang matematikawan Swiss, Leonard Euler berhasil menemukan jawaban atas permasalahan jembatan Konigsberg melalui pembuktian sederhana dengan memodelkan masalah tersebut ke dalam graf.

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), dimana V adalah himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan yang mungkin kosong dari elemen-elemen yang disebut sisi (*edges* atau *arcs*), sedemikian sehingga setiap elemen dalam E menghubungkan sepasang *vertex* (Munir, 2012: 356). Seiring perkembangan jaman dan teknologi, teori graf sudah banyak digunakan untuk memecahkan masalah yang ada di kehidupan sehari-hari, seperti masalah komunikasi, transportasi, penjadwalan, dan sebagainya.

Dalam perkembangannya, banyak sekali bermunculan kajian-kajian tentang teori graf, salah satunya adalah tentang dekomposisi graf. Dekomposisi dari graf G adalah koleksi $\{H_i\}$ dari subgraf G sedemikian sehingga $H_i = \langle E_i \rangle$ untuk suatu E_i subset $E(G)$ dan $\{E_i\}$ adalah partisi dari $E(G)$. Jika $\{H_i\}$ adalah sebuah dekomposisi dari G, maka G dapat ditulis sebagai penjumlahan sisi $H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n$, dimana $n = |\{H_i\}|$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 239).

Kemunculan jurnal yang disusun oleh Nur Rahmawati dan Budi Rahajeng dengan judul “Dekomposisi Graf Sikel, Graf Roda, Graf Gir, dan Graf Persahabatan” telah berhasil menemukan dan membuktikan beberapa teorema dekomposisi yang berlaku pada masing-masing graf tersebut. Hasil kajiannya antara lain: (1) misalkan $m \mid n$, $n, m \in N$, $m \neq n$, graf sikel C_n merupakan mK_2–dekomposisi, (2) graf roda W_n, $n \geq 3$ merupakan $2K_2$–dekomposisi, (3) graf gir G_n, $n \geq 3$ merupakan $3K_2$–dekomposisi, (4) graf persahabatan F_n, $n \geq 2$ merupakan C_3–dekomposisi. Sebelumnya, juga sudah ada skripsi yang membahas tentang dekomposisi graf dengan judul “Dekomposisi Graf Komplit” oleh Rina Munawaroh dari UIN Malang (2009).

Banyaknya jenis graf yang berkembang hingga saat ini, membuat pembahasan tentang dekomposisi graf masih dapat dilanjutkan pada dekomposisi graf yang lain, salah satunya adalah graf helm. Sidiq (dalam Wallis, 2001) menjelaskan bahwa graf helm (H_n) merupakan graf yang dibentuk dari graf roda (W_n) dengan menambahkan n titik dengan derajat 1 (satu) yang *adjacent* (terhubung langsung) dengan setiap titik terminalnya. Berdasarkan hal tersebut, maka pada makalah ini akan dibahas mengenai “Dekomposisi Graf Helm”.

METODE PENELITIAN

Definisi 1

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V(G), E(G)), ditulis dengan notasi G = (V(G), E(G)), dimana V(G) adalah himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik (*vertices* atau *node*) dan E(G) adalah himpunan yang mungkin kosong dari elemen-elemen yang disebut sisi (*edges* atau *arcs*), sedemikian sehingga setiap elemen dalam E(G) menghubungkan sepasang *vertex*.

(Rinaldi Munir, 2012: 356)

Definisi 2

Dua buah *vertex* pada graf tak berarah G dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung oleh sebuah sisi. Dengan kata lain, *u* bertetangga dengan v jika $(u,v) = (v,u)$ adalah sebuah sisi pada graf G.

(Rinaldi Munir, 2012: 365)

Definisi 3

Untuk sembarang sisi $e = (u,v) = (v,u)$, sisi e dikatakan bersisian dengan *vertexu* dan *vertexv*.

(Rinaldi Munir, 2012: 365)

Definisi 4

Derajat suatu *vertex* pada graf tak berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Derajat *vertex* v dapat dinotasikan dengan $d(v)$.

(Rinaldi Munir, 2012: 366)

Definisi 5

Sebuah graf H disebut subgraf dari graf G jika tiap-tiap *vertex* dalam H merupakan anggota himpunan V(G) dan tiap-tiap sisi dalam H merupakan anggota himpunan E(G). Atau dapat ditulis V(H) ⊆ V(G) dan E(H) ⊆ E(G). Subgraf H = (V(H), E(H)) disebut subgraf merentang dari graf G = (V(G), E(G)), apabila V(H) = V(G), yaitu H mengandung semua *vertex* dari G.

(Rinaldi Munir, 2012: 372 & 374)

Definisi 6

Graf beraturan adalah graf yang setiap *vertex*-nya mempunyai derajat yang sama. Jika derajat setiap *vertex* pada suatu graf adalah r, maka graf tersebut disebut sebagai graf beraturan-r.

(Rinaldi Munir, 2012: 378)

Definisi 7

Graf sikel (*Cycle graph*) merupakan sebuah graf sederhana yang setiap *vertex*-nya berderajat dua. Banyaknya *vertex* minimal pada graf sikel adalah 3. Graf sikel dengan n *vertex* dilambangkan dengan C_n. Banyaknya sisi sebuah graf sikel yang memiliki n buah *vertex* adalah n.

(Rahmawati dan Rahajeng, 2014: 65)

Definisi 8

Graf roda W_n (*Wheels graph*) merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu *vertex* baru pada graf sikel C_n, sedemikian hingga setiap *vertex* pada graf sikel C_n berhubungan langsung dengan *vertex* baru tersebut. Banyaknya *vertex* pada graf roda adalah $n+1$, sedangkan banyak sisinya adalah $2n$ (Rahmawati dan Rahajeng, 2014: 65). Dalam makalah ini, aturan pemberian nama *vertex* pada graf roda adalah dimulai dari salah satu *vertex* terminalnya yaitu dari v_1, kemudian v_2, v_3, v_4, dan seterusnya hingga v_n, dengan aturan searah jarum jam. Kemudian untuk *vertex* pusatnya diberi nama v_{n+1}.

Definisi 9

Sidiq (dalam Wallis, 2001) menjelaskan bahwa graf helm H_n adalah graf yang dibentuk dari graf roda W_n dengan menambahkan n *vertex* dengan derajat 1 (satu) yang adjacent (terhubung langsung) ke setiap *vertex* terminalnya. Graf helm H_n mempunyai $|V(H_n)|=2n+1$ dan $|E(H_n)|=3n$, dengan $n\geq 3$. Dalam makalah ini, aturan pemberian nama *vertex* pada graf helm adalah dimulai dari salah satu *vertex* terminalnya yaitu dari v_1, kemudian v_2, v_3, v_4, dan seterusnya hingga v_n, dengan aturan searah jarum jam. Kemudian dilanjutkan pada *vertex* terluar (yaitu *vertex* yang ditambahkan pada graf roda sehingga menjadi graf helm), dimulai dari v_{n+1} dimana v_{n+1} merupakan *vertex* yang adjacent dengan v_1 , selanjutnya v_{n+2} dimana v_{n+2} merupakan *vertex* yang adjacent dengan v_2, dan seterusnya hingga v_{2n} dimana v_{2n} merupakan *vertex* yang adjacent dengan v_n. Sedangkan untuk *vertex* pusat diberi nama v_{2n+1}.

Definisi 10

Graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfis ($G_1 \cong G_2$), jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik pada G_1 dan titik-titik pada G_2, serta antara sisi-sisi pada G_1 dan sisi-sisi pada G_2, sedemikian sehingga jika sisi *e* bersisian dengan titik *u* dan *v* di G_1, maka sisi e' yang berkorespondensi di G_2 juga harus bersisian dengan titik u' dan v' di G_2.

(Rinaldi Munir, 2012: 386)

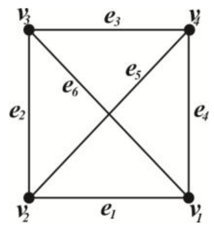
Definisi 11

Graf G dikatakan dapat difaktorkan ke dalam faktor-faktor $G_1, G_2, G_3, ..., G_n$ jika faktor-faktor tersebut merupakan sisi yang saling lepas untuk setiap pasangan sisi dan $\bigcup_{i=1}^{n} E(G_{\text{i}}) = E(G)$. Jika G difaktorkan ke dalam $G_1, G_2, G_3, ..., G_n$ maka dituliskan dengan $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus ... \oplus G_n$, dimana $\oplus$ adalah penjumlahan sisi. Sehingga, dapat dikatakan bahwa G adalah penjumlahan sisi dari faktor $G_1, G_2, G_3, ..., G_n$. Penjumlahan sisi ini disebut faktorisasi dari G ke dalam faktor $G_1, G_2, G_3, ..., G_n$. Jika terdapat faktorisasi dari graf G sedemikian sehingga untuk setiap faktor adalah k-faktor (k-faktor adalah graf bagian rentang beraturan – k), maka G dikatakan k-faktor. Jika G

adalah graf k-faktor, maka G adalah graf beraturan-r untuk bilangan bulat r yang merupakan kelipatan k.

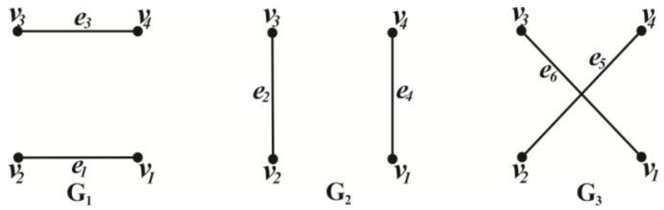
Jika graf G dapat difaktorkan ke dalam $G_1, G_2, G_3, ..., G_n$, dimana $G_i \cong H$ untuk sebuah graf H dan untuk setiap bilangan bulat $i(1 \le i \le n)$, maka dapat dikatakan bahwa G adalah terfaktorisasi-H dan G memiliki faktor yang isomorfik dengan H.

Contoh :



Gambar 1. Graf G

Bentuk faktorisasi graf G adalah sebagai berikut.



Gambar 2 Faktorisasi Graf G

Dari Gambar 2 dapat dilihat bahwa faktorisasi graf G membentuk 1-faktor. Jika $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$, maka G adalah faktorisasi.

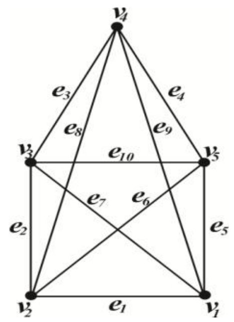
(Rahmawati dan Rahajeng, 2014: 65)

Definisi 12

Dekomposisi dari graf G adalah koleksi $\{H_i\}$ dari subgraf G sedemikian sehingga $H_i = \langle E_i \rangle$ untuk suatu E_i subset $E(G)$ dan $\{E_i\}$ adalah partisi dari $E(G)$. Jika $\{H_i\}$ adalah sebuah dekomposisi dari G maka G dapat ditulis sebagai penjumlahan sisi $H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus ... \oplus H_n$ (sama pada faktorisasi) dan G didekomposisikan ke dalam subgraf $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$, dimana $n = |\{H_i\}|$. Dengan kata lain $G = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus ... \oplus H_n$ adalah dekomposisi dari graf G.

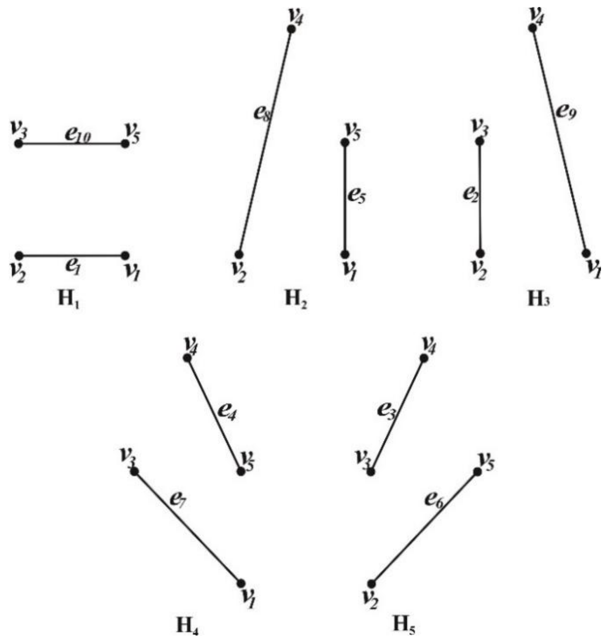
Jika $\{H_i\}$ adalah dekomposisi graf G sedemikian hingga $H_i \cong H$ untuk sebuah graf H dan untuk setiap $i(1 \le i \le n)$, maka G dikatakan H-dekomposisi. Jika G merupakan graf H-dekomposisi, maka dinotasikan H|G sehingga H dapat dikatakan pembagi banyaknya sisi di G dan G merupakan kelipatan dari H dan untuk setiap graf (tak kosong dan terhubung) merupakan K_2-dekomposisi.

Contoh :



Gambar 3. Graf G

Partisi sisi-sisi dari graf komplit G ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 4. Partisi dari Graf G

Dari gambar tersebut, dapat dilihat bahwa diperoleh 5 partisi dengan masing-masing terdiri dari 2 sisi. Jika $G = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5$ maka graf G dapat di dekomposisi. Karena subgraf $H_i \cong 2K_2$, maka graf *G* adalah $2K_2$ - dekomposisi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebuah graf G dapat di dekomposisikan ke dalam subgraf $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, jika setiap subgraf $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ tidak mempunyai sisi-sisi yang sama dan setiap

ISSN: 2089-8878
https://jurnal.uns.ac.id/jmme

subgrafnya tersebut saling isomorfis serta penjumlahan sisi semua subgraf $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ adalah graf G atau dapat ditulis $G = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus ... \oplus A_n$.

Graf helm H_n adalah graf yang dibentuk dari graf roda W_n dengan menambahkan n *vertex* dengan derajat 1 (satu) yang *adjacent* (terhubung langsung) ke setiap *vertex* terminalnya. Graf helm H_n mempunyai $|V(H_n)| = 2n+1$ dan $|E(H_n)| = 3n$, dengan $n \geq 3$. Dalam penelitiannya Rahmawati dan Rahajeng mengatakan bahwa *Misalkan diambil graf roda* W_n *dengan* $n \geq 3$, *kemudian graf roda* W_n *dipartisi menjadi subgraf* A_i *yang berupa* $2K_2$, *maka diperoleh teorema sebagai berikut :Graf roda* W_n, *dengan* $n \geq 3$ *dan* $W_n = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus ... \oplus A_n$ *merupakan* *$2K_2$- dekomposisi.*

Misalkan diambil graf helm H_n dengan $n \geq 3$ dan n adalah bilangan genap, kemudian graf helm H_n dipartisi menjadi subgraf A_i berupa $2K_2$.

Tabel 1. Dekomposisi dari graf helm *H_n*, untuk n adalah bilangan genap

Graf Helm	Dekomposisi	A-dekomposisi	Banyaknya titik dan sisi
H_4	$H_4 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5 \oplus A_6$ (6 partisi)	$A_i \cong 2K_2$	$\lvert V(A_i) \rvert = 4$ $\lvert E(A_i) \rvert = 2$
H_6	$H_6 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5 \oplus A_6 \oplus A_7 \oplus A_8 \oplus A_9$ (9 partisi)	$A_i \cong 2K_2$	$\lvert V(A_i) \rvert = 4$ $\lvert E(A_i) \rvert = 2$
H_8	$H_8 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5 \oplus A_6 \oplus A_7 \oplus A_8 \oplus A_9 \oplus ... \oplus A_{12}$ (12 partisi)	$A_i \cong 2K_2$	$\lvert V(A_i) \rvert = 4$ $\lvert E(A_i) \rvert = 2$
H_{10}	$H_{10} = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5 \oplus A_6 \oplus A_7 \oplus A_8 \oplus A_9 \oplus ... \oplus A_{15}$ (15 partisi)	$A_i \cong 2K_2$	$\lvert V(A_i) \rvert = 4$ $\lvert E(A_i) \rvert = 2$
⋮	⋮	⋮	⋮

Graf Helm	Dekomposisi	A-dekomposisi	Banyaknya titik dan sisi
H_n	$H_n = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5 \oplus A_6 \oplus A_7 \oplus A_8 \oplus A_9 \oplus \ldots \oplus A_{\frac{3}{2}n}$ ($\frac{3}{2}n$ partisi)	$A_i \cong 2K_2$	$\lvert V(A_i)\rvert = 4$ $\lvert E(A_i)\rvert = 2$

Berdasarkan Tabel 1 maka diperoleh sifat sebagai berikut:

Sifat 1:

Graf helm H_n , dengan $n \geq 3$ dan n adalah bilangan genap, dimana $H_n = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus \ldots \oplus A_{\frac{3}{2}n}$ merupakan $2K_2$ - dekomposisi.

Partisi graf helm H_n adalah sebagai berikut :

Untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Subgraf $A_i = \langle \{(v_i, v_{i+1}), (v_{i+2}, v_{2n+1})\} \rangle$, dimana setiap $i+1, i+2 \leq n$.

Jika $i+1, i+2 > n$, maka $i+1$, $i+2$ dinyatakan sebagai bilangan bulat 1,2,3,...,n(mod n)

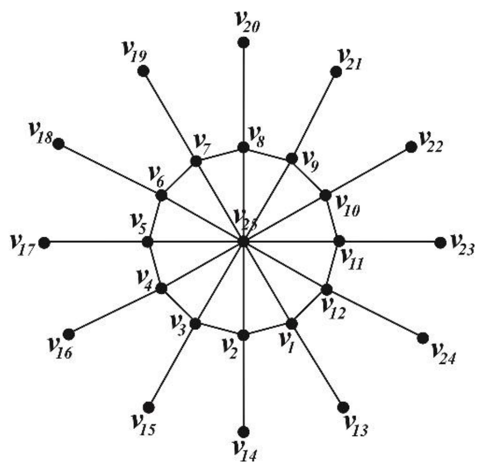
Sedangkan untuk $i = j + n$, dengan $j = 1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}n$

Subgraf $A_{j+n} = \left\langle \left\{ (v_j, v_{j+n}), (v_{j+\frac{1}{2}n}, v_{j+\frac{3}{2}n}) \right\} \right\rangle$.

Contoh :

Diberikan graf helm H_n , dengan n = 12

Graf helm H_{12} dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 5. Graf Helm H_{12}

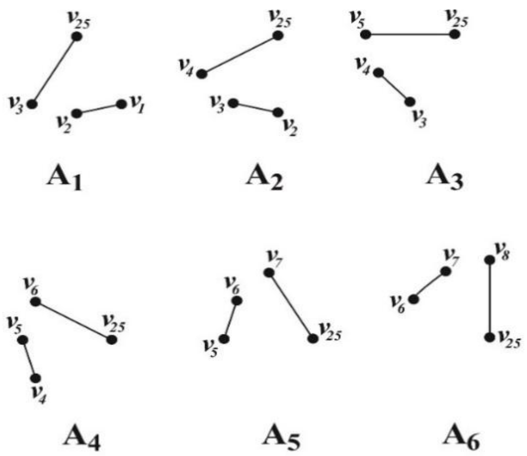
Vertex-vertex dari graf helm H_{12} adalah $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, ..., v_{24}, v_{25}\}$ Berdasarkan Sifat1 maka graf helm H_{12} dapat di partisi menjadi subgraf $A_i = \langle E_i \rangle$ yang berupa $2K_2$ dengan $i = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,...,17,18$.

Jadi, partisi dari graf helm H_{12} adalah $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, ..., A_{17}, A_{18}$, dimana $H_{12} = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus ... \oplus A_{18}$.

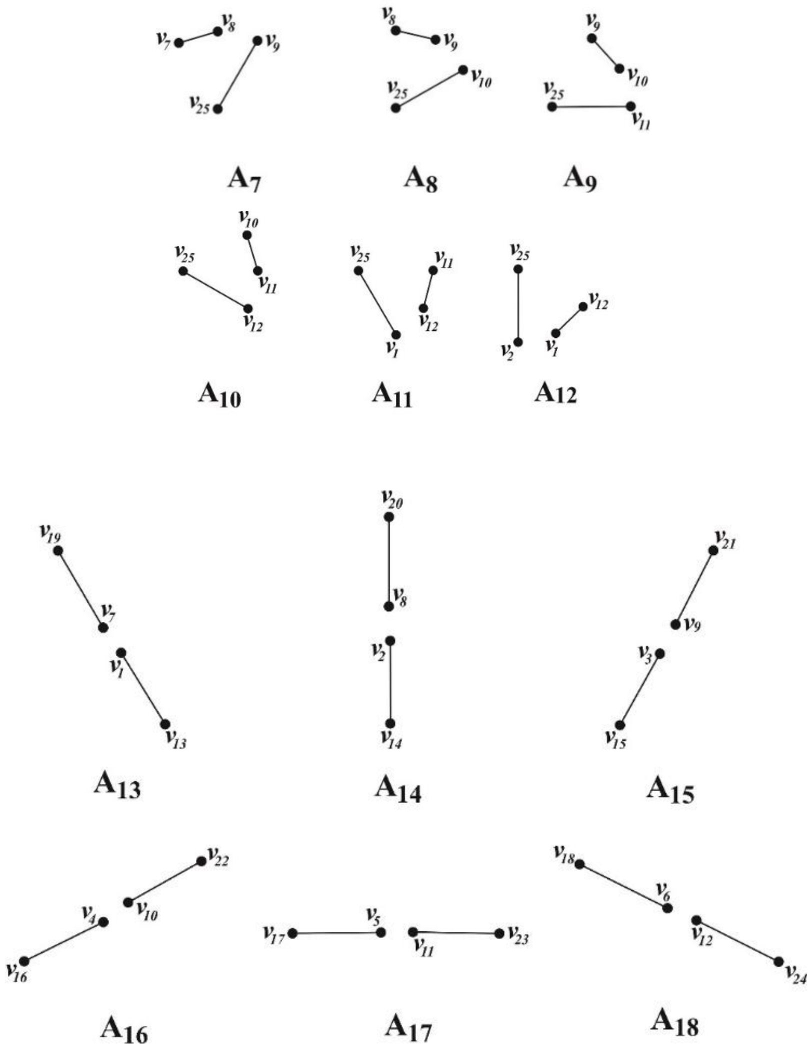
Subgraf A_i untuk $i = 1,2,3,4,5,6,...,18$ dapat ditulis sebagai berikut:

$A_1 = \langle \{(v_1, v_2), (v_3, v_{25})\} \rangle$ $A_{10} = \langle \{(v_{10}, v_{11}), (v_{12}, v_{25})\} \rangle$
$A_2 = \langle \{(v_2, v_3), (v_4, v_{25})\} \rangle$ $A_{11} = \langle \{(v_{11}, v_{12}), (v_1, v_{25})\} \rangle$
$A_3 = \langle \{(v_3, v_4), (v_5, v_{25})\} \rangle$ $A_{12} = \langle \{(v_{12}, v_1), (v_2, v_{25})\} \rangle$
$A_4 = \langle \{(v_4, v_5), (v_6, v_{25})\} \rangle$ $A_{13} = \langle \{(v_1, v_{13}), (v_7, v_{19})\} \rangle$
$A_5 = \langle \{(v_5, v_6), (v_7, v_{25})\} \rangle$ $A_{14} = \langle \{(v_2, v_{14}), (v_8, v_{20})\} \rangle$
$A_6 = \langle \{(v_6, v_7), (v_8, v_{25})\} \rangle$ $A_{15} = \langle \{(v_3, v_{15}), (v_9, v_{21})\} \rangle$
$A_7 = \langle \{(v_7, v_8), (v_9, v_{25})\} \rangle$ $A_{16} = \langle \{(v_4, v_{16}), (v_{10}, v_{22})\} \rangle$
$A_8 = \langle \{(v_8, v_9), (v_{10}, v_{25})\} \rangle$ $A_{17} = \langle \{(v_5, v_{17}), (v_{11}, v_{23})\} \rangle$
$A_9 = \langle \{(v_9, v_{10}), (v_{11}, v_{25})\} \rangle$ $A_{18} = \langle \{(v_6, v_{18}), (v_{12}, v_{24})\} \rangle$

Sehingga dekomposisi dari graf helm H_{12} adalah sebagai berikut :



 ISSN: 2089-8878
https://jurnal.uns.ac.id/jmme



Gambar 6. Dekomposisi Graf Helm H_{12}

Karena $H_{12} = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus ... \oplus A_{18}$ dimana setiap subgraf $A_i \cong 2K_2$, maka graf helm H_{12} merupakan $2K_2$-dekomposisi.

Misalkan diambil graf helm H_n dengan $n \geq 3$, kemudian graf helm H_n dipartisi menjadi subgraf A_i berupa $3K_2$.

Tabel 2. Dekomposisi dari graf helm H_n

Graf Helm	Dekomposisi	A-dekomposisi	Banyaknya titik dan sisi
H_3	$H_3 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus$ $A_5 \oplus A_6 \oplus A_7 \oplus A_8 \oplus A_9$ (9 partisi)	$A_i \cong K_2$	$\lvert V(A_i) \rvert = 2$ $\lvert E(A_i) \rvert = 1$

H_4	$H_4 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4$ (4 partisi)	$A_i \cong 3K_2$	$\|V(A_i)\| = 6$ $\|E(A_i)\| = 3$
H_5	$H_5 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5$ (5 partisi)	$A_i \cong 3K_2$	$\|V(A_i)\| = 6$ $\|E(A_i)\| = 3$
H_6	$H_6 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5 \oplus A_6$ (6 partisi)	$A_i \cong 3K_2$	$\|V(A_i)\| = 6$ $\|E(A_i)\| = 3$
H_7	$H_7 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5 \oplus A_6 \oplus A_7$ (7 partisi)	$A_i \cong 3K_2$	$\|V(A_i)\| = 6$ $\|E(A_i)\| = 3$
H_8	$H_8 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5 \oplus A_6 \oplus A_7 \oplus A_8$ (8 partisi)	$A_i \cong 3K_2$	$\|V(A_i)\| = 6$ $\|E(A_i)\| = 3$
H_9	$H_9 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5 \oplus A_6 \oplus A_7 \oplus A_8 \oplus A_9$ (9 partisi)	$A_i \cong 3K_2$	$\|V(A_i)\| = 6$ $\|E(A_i)\| = 3$
: :	: :	: :	: :
H_n (untuk $n > 3$)	$H_n = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5 \oplus A_6 \oplus A_7 \oplus A_8 \oplus A_9 \oplus ... \oplus A_n$ (n partisi)	$A_i \cong 3K_2$	$\|V(A_i)\| = 6$ $\|E(A_i)\| = 3$

Berdasarkan Tabel 2 maka diperoleh teorema sebagai berikut :

Teorema:

Graf helm H_n *, dengan* $n > 3$ *dan* $H_n = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus ... \oplus A_n$ *merupakan* $3K_2$ *-dekomposisi.*

Bukti

Ambil sebarang graf helm H_n

Misal $V(H_n) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_{2n-1}, v_{2n}, v_{2n+1}\}$

$E(H_n) = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_{3n-1}, e_{3n}\}$

Partisi graf helm H_n menjadi subgraf $A_i = \langle E_i \rangle$ yang berupa $3K_2$, dimana $i \neq j$ maka $A_i \cap A_j = \varnothing$.

Misalkan $H_n = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus ... \oplus A_n$.

Partisi graf helm H_n sebagai berikut :

Untuk $i = 1, 2, 3, ..., n$.

Subgraf $A_i = \left\langle \{(v_i, v_{i+1}), (v_{i+2}, v_{2n+1}), (v_{i+3}, v_{i+3+n})\} \right\rangle$, dimana setiap $i+1, i+2, i+3 \leq n$ dan $i+3+n \leq 2n$.

Jika $i+1, i+2, i+3 > n$, maka $i+1$, $i+2$, dan $i+3$ dinyatakan sebagai bilangan bulat $1, 2, 3, ..., n(\bmod n)$, serta jika $i+3+n > 2n$ maka $i+3+n$ dinyatakan sebagai $i+3$.

Akan ditunjukkan bahwa setiap subgraf tersebut saling lepas.

Setiap subgraf dikatakan saling lepas jika $i \neq j$ maka $A_i \cap A_j = \varnothing$, dimana $i = 1, 2, 3, ..., n$ dan $j = 1, 2, 3, ..., n$.

Akan dibuktikan melalui kontraposisinya.

Pernyataan jika $i \neq j$ maka $A_i \cap A_j = \varnothing$ ekuivalen dengan mengatakan jika $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ maka $i = j$, dimana $i = 1, 2, 3, ..., n$ dan $j = 1, 2, 3, ..., n$.

Diketahui $A_i \cap A_j \neq \varnothing$, maka $\exists e_k \in A_i \cap A_j, k \in N$.

Hal ini berarti bahwa $e_k \in A_i$ dan $e_k \in A_j$.

Berdasarkan definisi, jika $e_k \in A_i$ maka $e_k = (v_i, v_{i+1})$ atau (v_{i+2}, v_{n+1}) atau $e_k = (v_{i+3}, v_{i+3+n})$.

Begitu pula jika $e_k \in A_j$ maka $e_k = (v_j, v_{j+1})$ atau (v_{j+2}, v_{n+1}) atau $e_k = (v_{j+3}, v_{j+3+n})$.

Akibatnya, $(v_i, v_{i+1}) = (v_j, v_{j+1})$, $(v_{i+2}, v_{n+1}) = (v_{j+2}, v_{n+1})$, dan $(v_{i+3}, v_{i+3+n}) = (v_{j+3}, v_{j+3+n})$.

Sehingga diperoleh $i = j$.

Jadi, terbukti bahwa jika $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ maka $i = j$, dimana $i = 1, 2, 3, ..., n$ dan $j = 1, 2, 3, ..., n$.

Hal ini juga membuktikkan bahwa, pernyataan jika $i \neq j$ maka $A_i \cap A_j = \varnothing$, dimana $i = 1, 2, 3, ..., n$ dan $j = 1, 2, 3, ..., n$ bernilai benar.

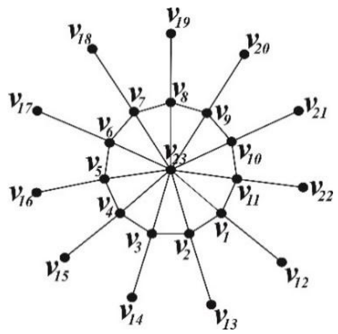
Karena dapat dibuktikan jika $i \neq j$ maka $A_i \cap A_j = \varnothing$, berarti tidak ada sisi yang sama pada setiap subgraf.

Dengan demikian, terbukti bahwa untuk setiap $i = 1, 2, 3, ..., n$, dan $H_n = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus ... \oplus A_n$, maka graf H_n merupakan $3K_2$ - dekomposisi.

Contoh :

Diberikan graf helm H_n, dengan n = 11

Graf helm H_{11} dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 7. Graf Helm H_{11}

Vertex-vertex dari graf helm H_{11} adalah $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, ..., v_{22}, v_{23}\}$

Berdasarkan Teorema 3.1 maka graf helm H_{11} dapat di partisi menjadi subgraf $A_i = \langle E_i \rangle$ yang berupa $3K_2$ dengan $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$.

Jadi, partisi dari graf helm H_{11} adalah $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}$, dimana $H_{11} = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus ... \oplus A_{11}$.

Subgraf A_i untuk $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 11$ dapat ditulis dengan $A_i = \langle \{(v_i, v_{i+1}), (v_{i+2}, v_{2n+1}), (v_{i+3}, v_{i+3+n})\} \rangle$ dimana setiap $i+1, i+2, i+3 \le n$ dan $i+3+n \le 2n$. Jika $i+1, i+2, i+3 > n$, maka $i+1$, $i+2$, dan $i+3$ dinyatakan sebagai bilangan bulat $1, 2, 3, ..., n (\bmod n)$, serta jika $i+3+n > 2n$ maka $i+3+n$ dinyatakan sebagai $i+3$.

Berdasarkan aturan tersebut, maka subgraf $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, ..., A_{11}$ adalah :

$A_1 = \langle \{(v_1, v_2), (v_3, v_{23}), (v_4, v_{15})\} \rangle$

$A_2 = \langle \{(v_2, v_3), (v_4, v_{23}), (v_5, v_{16})\} \rangle$

$A_3 = \langle \{(v_3, v_4), (v_5, v_{23}), (v_6, v_{17})\} \rangle$

$A_4 = \langle \{(v_4, v_5), (v_6, v_{23}), (v_7, v_{18})\} \rangle$

$A_5 = \langle \{(v_5, v_6), (v_7, v_{23}), (v_8, v_{19})\} \rangle$

$A_6 = \langle \{(v_6, v_7), (v_8, v_{23}), (v_9, v_{20})\} \rangle$

$A_7 = \langle \{(v_7, v_8), (v_9, v_{23}), (v_{10}, v_{21})\} \rangle$

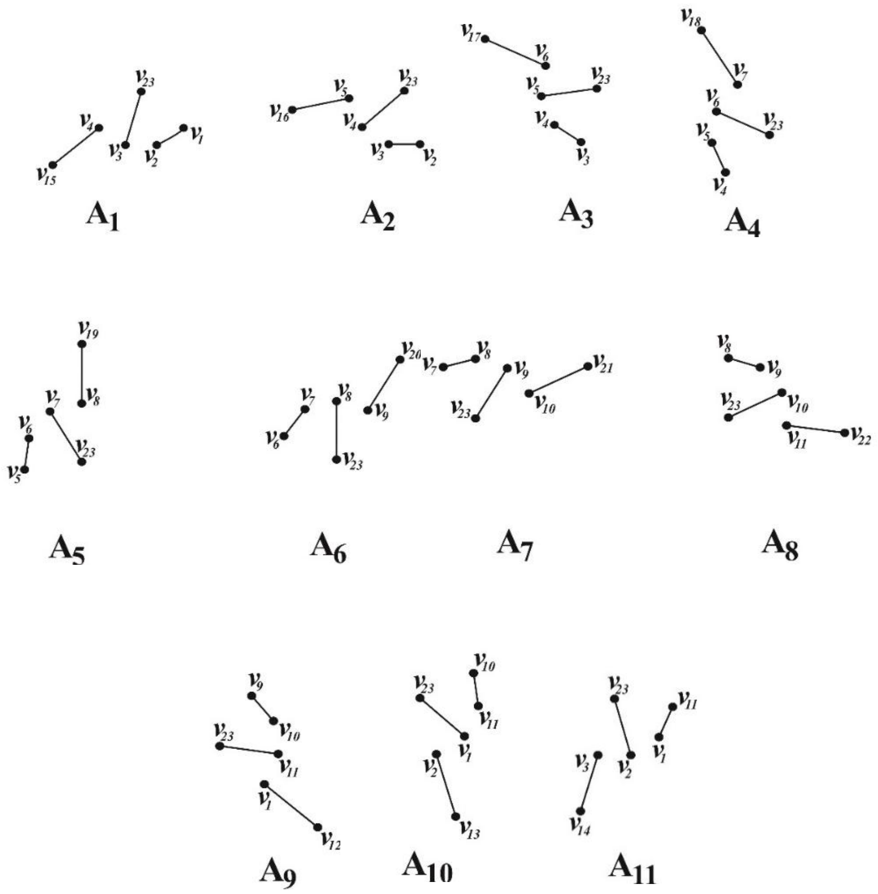
$A_8 = \langle \{(v_8, v_9), (v_{10}, v_{23}), (v_{11}, v_{22})\} \rangle$

$A_9 = \langle \{(v_9, v_{10}), (v_{11}, v_{23}), (v_{12}, v_{23})\} \rangle$, karena $i+3>n$ maka untuk *vertex* v_{12} yaitu bilangan 12 diambil sebagai 1(*mod* 11), kemudian karena $i+3+n>2n$ maka untuk *vertex* v_{23} yaitu bilangan 23 diambil sebagai $i+3=9+3=12$, sehingga: $A_9 = \langle \{(v_9, v_{10}), (v_{11}, v_{23}), (v_1, v_{12})\} \rangle$

Dengan cara yang sama diperoleh :

$A_{10} = \langle \{(v_{10}, v_{11}), (v_1, v_{23}), (v_2, v_{13})\} \rangle$ $A_{11} = \langle \{(v_{11}, v_1), (v_2, v_{23}), (v_3, v_{14})\} \rangle$

Sehingga dekomposisi dari graf helm H_{11} adalah sebagai berikut :



Gambar 8. Dekomposisi Graf Helm H_{11}

Karena $H_{11} = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus ... \oplus A_{11}$ dimana setiap subgraf $A_i \cong 3K_2$, maka graf helm H_{11} merupakan $3K_2$ -dekomposisi.

SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil pembahasan diatas, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Graf helm H_n , $n \geq 3$ dan n adalah bilangan genap dapat di partisi menjadi subgraf $A_i = \langle E_i \rangle$ berupa $2K_2$ dimana $H_n = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus ... \oplus A_{\frac{3}{2}n}$. Sehingga graf helm H_n dengan $n \geq 3$ dan n adalah bilangan genap merupakan $2K_2$ - dekomposisi.
2. Graf helm H_n , $n > 3$, dapat di partisi menjadi subgraf $A_i = \langle E_i \rangle$ berupa $3K_2$ dengan $H_n = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus ... \oplus A_n$ Sehingga graf helm H_n dengan $n > 3$ merupakan $3K_2$ - dekomposisi.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, Gery dan Lesniak, Linda. (1986). *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Munawaroh, Rina. (2009). *Dekomposisi Graf Komplit*. Dalam http://etheses.uin-malang.ac.id/6393/1/04510046.pdf. Diunduh pada tanggal 25 Februari 2018.

Munir, Rinaldi. (2012). *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.

Rahmawati, Nur dan Rahajeng, Budi. (2014). *Dekomposisi Graf Sikel, Graf Roda, Graf Gir, dan Graf Persahabatan*. Dalam http://jurnalmahasiswa.unesa.ac.id/index.php/mathunesa/article/view/9365/12427. Diunduh pada tanggal 25 Februari 2018.

Sidiq, Muhamad. (2014). *Pemberian Nomor Vertex Pada Topologi Jaringan Graf Wheel, Graf Helm Dan Graf Lollipop*. UNS Surakarta: Skripsi, tidak diterbitkan.