Journal of Mathematics and Mathematics Education *ISSN: 2089-8878*
Vol.8, No.1, hal 9-15 Juli 2018 *https://jurnal.uns.ac.id/jmme*

DIMENSI METRIK LOKAL PADA GRAF ANTIPRISMA DAN GRAF SUN

[1]Silfiatul Khoiriah, [2]Tri Atmojo Kusmayadi

[1,2]Universitas Sebelas Maret Surakarta

Abstract: For example G is a connected and nontrivial graph. The distance between two vertices u and v in G is the shortest path length between vertex u and v which is denoted by d (u, v). For an ordered set of $\boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_n}\}$of n vertex and v is a vertex in G, then the representation of vertex v to W is an ordered pair $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{W}) = (\boldsymbol{d}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w_1}), \boldsymbol{d}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w_2}), \dots, \boldsymbol{d}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w_n}))$. Set W is called as local distinguishing if $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{W}) \neq \boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{W})$ for each pair of vertex u and v is adjacent to G. Local distinguishing set W with minimum cardinality is called as local metric base and the number of vertex on the local metric base of graph G is called as local metric dimension which is denoted by $\mathbf{dim}_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{G})$. In this study, the local metric dimension is determined on antiprism An graph and sun Sn graph. The results reveal that local metric dimension of antiprism graph is $\mathbf{dim}_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{A_n}) = \mathbf{3}$ for $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{3}$. Local metric dimension of sun graph is$\mathbf{dim}_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{S_n}) = \mathbf{1}$ for even n and $\mathbf{dim}_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{S_n}) = \mathbf{2}$ for odd n.
Keywords: *local metric dimension, antiprism graph, sun graph, local distinguishing set.*

PENDAHULUAN

Teori graf adalah salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari mengenai terminologi, jenis, dan sifat graf. Menurut Chartrand dan Lesniak, suatu graf G adalah himpunan tak kosong berhingga $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ yang disebut himpunan *vertex* dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ merupakan himpunan pasangan tidak berurutan dari anggota-anggota V yang disebut *edge*. *Vertex* merupakanrepresentasi dari titik dan *edge* merupakan representasi dari garis. Teori grafdalam kegunaannya dapat diterapkan untuk menggambarkan berbagai macamstruktur yang ada dengan tujuan sebagai visualisasi objek agar menjadi mudahuntuk dipahami, seperti pada jaringan komunikasi, transportasi, riset operasi,dan sebagainya. Oleh karena itu, teori graf mengalami perkembangan yang begitu pesat.

Seiring perkembangan teori graf yang begitu pesat, muncul berbagai konsep baru, diantaranya yaitu dimensi metrik dari suatu graf yang diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975. Kemudian pada tahun 1976, Harary dan Melter secara independen juga memperkenalkan konsep yang sama. Misal G adalah suatu graf terhubung nontrivial dengan himpunan *vertex* $V(G)$. Suatu himpunan $W \subset V(G)$ merupakan himpunan pembeda dari G jika $d(u,x) \neq d(v,x)$ untuk sembarang *vertex* $u, v \in V(G)$ dan beberapa vertex $x \in W$, dimana $d(u,x)$ menyatakan jarak, yaitu panjang lintasan (*path*) terpendek dari *vertex* u ke *vertex* x. Himpunan pembeda dengan kardinalitas terkecil disebut himpunan pembeda minimum atau basis dan banyaknya anggota pada basis disebut dimensi metrik. Hingga sekarang, telah muncul beberapa variasi dari himpunan pembeda, dan salah satunya yaitu himpunan pembeda lokal yang diperkenalkan oleh Okamoto *et al*. pada tahun 2010. Dimisalkan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ merupakan himpunan bagian dari himpunan *vertex* pada graf G. Representasi suatu *vertex* u pada graf G terhadap W merupakan pasangan berurutan dari jarak *vertex* u dengan semua *vertex* di W. Jarak dua *vertex* pada graf G didefinisikan sebagai panjang lintasan (*path*) terpendek dari satu *vertex* ke *vertex* lainnya. Himpunan W disebut sebagai himpunan pembeda lokal jika representasi setiap dua *vertex* yang saling *adjacent* berbeda terhadap W. Himpunan pembeda lokal dengan jumlah anggota minimal disebut basis metrik lokal dan banyaknya anggota pada basis disebut dimensi metrik lokal.

Pada tahun 2016, Rodriguez-Velazquez *et al*. menentukan dimensi metrik lokal pada graf hasil operasi korona. Kemudian, pada tahun 2017 Cahyabudi dan Kusmayadi menentukan dimensi metrik lokal pada graf *lollipop*, graf *web*, dan graf *friendship*. Tahun 2018, Budianto dan Kusmayadi menentukan dimensi metrik lokal pada graf *starbarbell*, graf $K_m \odot P_n$, dan graf $Möbius\ ladder$. Pada tahun yang sama, Solekhah dan Kusmayadi menentukan dimensi metrik lokal pada graf *t-fold wheel*, graf $P_n \odot K_m$, dan graf *generalized fan.* Penelitian tersebut dapat digunakan sebagai acuan dalam menentukan dimensi metrik lokal pada kelas graf yang lain. Pada penelitian ini akan dibahas mengenai dimensi metrik lokal pada graf *antiprisma* dan graf *sun*.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka yaitu dengan mengumpulkan referensi berupa buku-buku dan jurnal. Dari metode ini, penulis dapat menentukan dimensi metrik lokal pada graf *antiprisma* dan graf *sun*.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini diuraikan sebagai berikut.

1. Menentukan W pada graf *antiprisma* dan graf *sun*.
2. Menghitung jarak setiap *vertex* dengan W yang telah ditentukan, sedemikian sehingga setiap dua *vertex* berbeda yang saling *adjacent* pada graf *antiprisma* dan graf *sun* mempunyai representasi yang berbeda terhadap W.
3. Menentukan dimensi metrik lokal dan pola umum dimensi metrik lokal pada graf tersebut.
4. Membuat pembuktian dengan menyusun lema dan teorema berdasarkan hasil yang diperoleh.
5. Membuat kesimpulan.

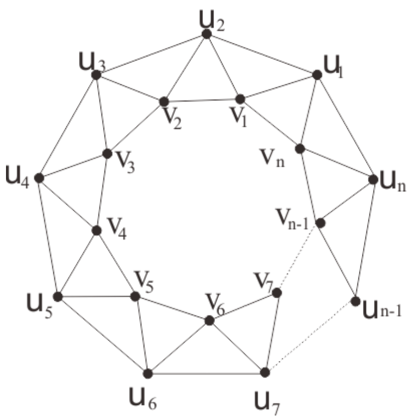
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas dimensi metrik lokal pada graf *antiprisma*dan graf*sun* sehingga diperoleh rumus umum dan disertai pembuktiannya.

A. Dimensi Metrik Lokal Pada graf antiprisma

Menurut Bača*et al.* graf *antiprisma* A_n dengan $n \geq 3$ adalah suatu graf regular ber-*degree* empat dengan jumlah *vertex* $2n$dan jumlah *edge* $4n$. Tersusun atas C_n luar dan dalam kemudian antara kedua *cycle* dihubungkan oleh *edge* $v_i u_i$ dan $v_i u_{i+i(mod\ n)}$ untuk $i = 1,2,3, \dots, n$.

Sebuah graf *antiprisma* A_n dengan order $2n$, *size* $4n$, danhimpunan *vertex* $V(A_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1 Graf *antiprisma* A_n

Teorema 1.1.*Jika A_n merupakan graf antiprisma, maka $dim_l\, A_n = 3$.*

Bukti. Misal dipilih $W = \{u_1, u_n, v_1\}$ adalah himpunan pembeda lokal, diperoleh representasi setiap *vertex* terhadap W untuk n genap adalah

$$r(u_i|W) = \begin{cases} (i-1, i, i), & 1 \leq i \leq \frac{n}{2}; \\ (n-i+1, n-i, n-i+1), & \frac{n}{2} < i < n. \end{cases}$$

$$r(v_i|W) = \begin{cases} (1,1,0), & i = 1; \\ (i-1, i, i-1), & 2 \leq i \leq \frac{n}{2}; \\ (i-1, i-1, i-1), & i = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil; \\ (n-i+2, n-i+1, n_i+1), & \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil < i \leq n. \end{cases}$$

dan untuk n ganjil adalah

$$r(u_i|W)\begin{cases}(i-1,i,i), & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor;\\ (i-1,i-1,1), & i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil;\\ (n-i+1,n-i,n-i+1), & \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil < i \le n.\end{cases}$$

$$r(v_i|W)\begin{cases}(1,1,0), & i = 1;\\ (i-1,i,i-1), & 2 \le i \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil;\\ (i-1,i-2,i-2), & \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \le i \le n.\end{cases}$$

Setiap *vertex* $V(A_n)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W, sehingga W adalah himpunan pembeda lokal dengan tiga elemen. Selanjutnya ditunjukkan bahwa A_n tidak memiliki himpunan pembeda lokal dengan 2 elemen.

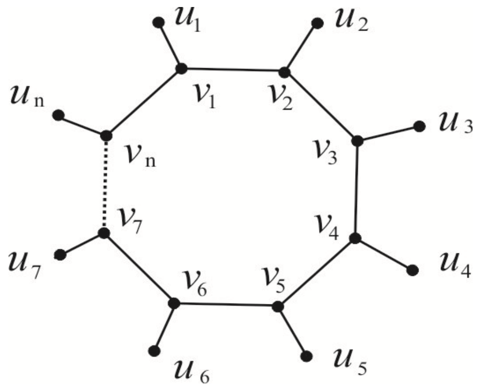
Andaikan A_n memiliki himpunan pembeda W dengan 2 elemen, pemilihan *vertex* dari W ada tiga kemungkinan

1. Kedua *vertex* dari W termasuk dalam $\{u_i: 1 \le i \le n\} \subset V(A_n)$, misal diambil $W = (u_1, u_2)$ diperoleh $r(u_n|W) = r(v_1) = (1,2)$. Begitupun jika diambil sembarang dua *vertex* $u_i \in V(A_n)$ dengan $1 \le i \le n$menjadi himpunan W, maka pasti akan terdapat dua *vertex* pada A_n yang memiliki representasi sama terhadap W.
2. Kedua *vertex* dari W termasuk dalam $\{v_i: 1 \le i \le n\} \subset V(A_n)$, misal diambil $W = (v_1, v_2)$ diperoleh $r(u_1|W) = r(v_n) = (1,2)$. Begitupun jika diambil sembarang dua *vertex* $v_i \in V(A_n)$ dengan $1 \le i \le n$menjadi himpunan W, maka pasti akan terdapat dua *vertex* pada A_n yang memiliki representasi sama terhadap W.
3. Salah satu *vertex* dari W termasuk dalam $\{u_i: 1 \le i \le n\} \subset V(A_n)$ dan *vertex* lainnya termauk kedalam $\{v_i: 1 \le i \le n\} \subset V(A_n)$. Misal pada A_4 diambil $W = (v_1, u_1)$ diperoleh $r(u_3|W) = r(v_3) = (2,2)$. Begitupun juka diambil sembarang dua *vertex* dari $u_i, v_i \in V(A_n)$ dengan $1 \le i \le n$menjadi himpunan W, maka pasti akan terdapat dua *vertex* pada A_n yang memiliki representasi sama terhadap W.

Dari kemungkinan yang ada, diperoleh hasil yang kontradiksi dengan pengandaian. Oleh karena itu A_n tidak memiliki himpunan pembeda lokal dengan dua elemen dan diperoleh bahwa himpunan pembeda lokal pada A_n adalah tiga elemen, sehingga $\dim_l A_n = 3$.

B. Dimensi Metrik Lokal Pada Graf Sun

Menurut Mirzakhah dan Kiani. Graf *sun* adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan satu pasangan *vertex* dan *edge* dari setiap *vertex* dalam suatu *cycle.* Misalkan graf *sun* S_n mempunyai himpunan *vertex* $V(S_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dengan $n \geq 3$. *Vertex-vertex* $v_1, v_2, \dots, v_n$ membentuk *cycle* dan *vertex* v_i *adjacent* dengan *vertex* pada u_i, dimana $1 \leq i \leq n$. Bentuk umum graf *sun* dapat dilihat pada Gambar 2



Gambar 2 Graf *sun* S_n

Berikut diberikan teorema dari Okamoto *et al.* yang digunakan untuk mendukung teorema selanjutnya.

Teorema 1.2. *Diberikan graf* G *adalah graf terhubung nontrivial ber-order* n, *maka* $dim_l(G) = n - 1$ *jika dan hanya jika* $G = K_n$ *dan* $dim_l(G) = 1$ *jika dan hanya jika* G *adalah graf bipartit.*

Teorema 1.3. *Jika* S_n *adalah suatu graf sun dengan* $n \geq 3$, *maka* $dim_l\, S_n$ *adalah*

$$\begin{cases} 1, & untuk\ n\ genap; \\ 2, & untuk\ n\ ganjil. \end{cases}$$

Bukti. Diberikan graf *sun* S_n dengan himpunan *vertex* $V(S_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Dimensi mertik lokal pada graf *sun* terdiri atas dua kasus, yaitu untuk n ganjil dan n genap.

Kasus 1. Untuk n genap

Misalkan himpunan *vertex* pada S_n dipartisi menjadi dua himpunan *vertex* yaitu $V_1 = \{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{n-1}, u_2, u_4, u_6, \dots, u_n\}$ dan $V_1 = \{v_2, v_4, v_6, \dots, v_n, u_1, u_3, u_5, \dots, u_{n-1}\}$. Setiap *vertex* pada dua partisi tersebut tidak saling *adjacent*, yang berarti merupakan graf *bipartit.* Berdasarkan pada teorema 1.2. dapat disimpulkan bahwa $\dim_l S_n = 1$ untuk n genap.

Kasus 2. Untuk n ganjil

Misalkan dipilih $W = \{v_{\frac{n+1}{2}}, v_1\} \subset V(S_n)$, diperoleh representasi setiap *vertex* terhadap W adalah

$$r(u_i|W)\begin{cases}\left(\frac{n+1}{2} - i, i-1\right), & 1 \le i \le \frac{n+1}{2};\\ \left(\frac{n+1}{2}, n-i+2\right), & \frac{n+1}{2} < i \le n.\end{cases}$$

$$r(v_i|W)\begin{cases}\left(\frac{n+3}{2} - i, i\right), & 1 \le i \le \frac{n+1}{2};\\ (\frac{n+1}{2}, n-i+2), & \frac{n+1}{2} < i \le n.\end{cases}$$

Karena setiap *vertex* yang saling *adjacent* pada S_n memiliki representasi yang berbeda terhadap W sehingga W merupakan himpunan pembeda lokal dengan dua elemen. Berdasarkan pada teorema 1.2. yang menyatakan bahwa $\dim_l(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf *bipartit*, sedangkan graf S_n dengan n ganjil tidak dapat dipartisi menjadi dua himpunan *vertex* sehingga bukan merupakan graf *bipartit* oleh sebab itu, terbukti benar bahwa himpunan pembeda lokal pada graf S_n adalah dua elemen, maka $\dim_l(S_n) = 2$ untuk n ganjil.

SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Dimensi metrik lokal pada graf *antiprisma* A_n dengan $n \ge 3$ adalah $\dim_l(A_n) = 3$.
2. Dimensi metrik lokal pada graf *sun*S_n dengan $n \ge 3$ adalah 1 untuk n genap dan 2 untuk n ganjil.

Penelitian ini membahas tentang dimensi metrik lokal pada graf *antiprisma* dan graf *sun*. Bagi pembaca yangtertarik dengan topik ini, dapat mengembangkan penelitian dengan menerapkannya pada kelas-kelas graf lain misalnya graf *helm* atau graf *sunflower*.

DAFTAR PUSTAKA

Bača, M., F. Bashir, and A. Semaničová. (2011). Face Antimagic Labeling of Antiprism. *Util. Math,* 84, 209-224.

Budianto, W.T., and T.A Kusmayadi. (2018). The Local Metric Dimension of starbarbell Graph, $K_m \odot P_n$ graph and Möbius Ladder graph, *Journal of Physics: conference Series* 1008 012050.

Cahyabudi, A. N. and T. A. Kusmayadi. (2017).On The Local Metric Dimension of A Lollipop Graph, A Web Graph, and A Friendship Graph. *Journal of Physics: Conference Series* 909 012039.

Chartrand, G., and L. Lesniak. (1979). *Graphs and Digraphs,* 2^{nd} *ed.* California, Wadsworth Inc.

Harary, F. and R. A. Melter (1976). On The Metric Dimension of A Graph. *Ars Combinatoria* 2, 191-195.

Mirzakhah, M. and D. Kiani. (2010). The Sun Graph is Determined by Its Signless Laplacian Spectrum. *Electronic Journal of Linear Algebra* 20, 610–620.

Okamoto, F., B. Phinezy, P. Zhang. (2010). The Local Metric Dimension of A Graph. *Mathematica Bohemica* 135(3), 239-255.

Rodr´ıguez-Vel´azquez, J. A., G. A. Barrag´an-Ram´ırez, and C. G. G´omez. (2016). On the Local Metric Dimension of Corona Product Graphs. *Bull malays. Math. Sci. Soc.* 39(2), 157-173.

Slater, P. J., Leaves of Trees. (1975). *Congressus Numerantium* 14, 549-559.

Solekhah, R.A., and T.A. Kusmayadi. (2017). On The Local Metric Dimension of t-Fold Wheel Graph, $P_n \odot K_m$ Graph, and Generalized Fan Graph. *International Conference on Combinatoric, Graph Theory and Network Topology Universitas Negeri Jember* .