DIMENSI METRIK LOKAL PADA GRAF MUSICAL DAN GRAF STACKED PRISM

Elis Dyah Wulancar[1], Tri Atmojo Kusmayadi[2]

[1,2]Universitas Sebelas Maret Surakarta

Abstract: For example G is a connected and nontrivial graph. The distance between two vertices u and v in G is the shortest path between vertex u and v which is denoted by d (u, v). Suppose that there is a sequential set of $\boldsymbol{W}=\{\boldsymbol{w_1},\boldsymbol{w_2},\cdots,\boldsymbol{w_n}\}$ of vertex n which is different from G, then the representation of vertex v to W is a sequential pair of $(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{W})=(\boldsymbol{d}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w_1}),\boldsymbol{d}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w_2}),\cdots,\boldsymbol{d}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w_n}))$. The set W is called as local distinguishing set if $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{W})\neq\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{W})$for each pair of vertex u and v is adjacent to G. The local distinguishing set W with minimum cardinality is called as local metric base and its cardinality is called as local metric dimension of graph G denoted by $\mathbf{dim}_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{G})$. In this research, metric local dimension of Musical MGn and stacked prism graphs Ym is determined. This is literature study by combining relevant references. The results state that local metric dimension in musical graphs is $\mathbf{dim}_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{MG_n})=\mathbf{5}$ for n and $\mathbf{dim}_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{MG_n})=\boldsymbol{n}$ for n > 3. Local metric dimension in stacked prism graph is $\mathbf{dim}_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{Y_{m,n}})=\mathbf{1}$ for even m and $\mathbf{dim}_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{Y_{m,n}})=\mathbf{2}$ for odd m.
Keywords: *local metric dimension, musical graph, stacked prism graph, local distinguishing set*.

PENDAHULUAN

Matematika dapat diterapkan dalam berbagai bidang di kehidupan nyata. Teori graf adalah salah satu cabang ilmu matematika yang sering diterapkan. Menurut Chartrand *et al*. (2016), suatu graf *G* adalah himpunan tak kosong berhingga $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ yang disebut *vertex* dan $E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ merupakan himpunan pasangan tidak berurutan dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut *edge*. *Vertex* dan *edge* secara berurutan merupakan representasi dari titik dan garis. Teori graf dapat diterapkan dalam beberapa hal, seperti *puzzle games*, *transportation problem*, *operation research*, dan lain sebagainya. Oleh karena itu, teori graf berkembang sangat pesat.

Seiring dengan perkembangannya yang pesat, telah muncul konsep-konsep baru dalam teori graf. Salah satu konsep dalam teori graf yaitu dimensi metrik lokal yang merupakan pengembangan dari konsep dimensi metrik. Misal $W=\{w_1,w_2,\cdots,w_k\}$ merupakan himpunan bagian dari himpunan *vertex* dalam suatu graf *G*. Representasi suatu *vertex u* terhadap *W* merupakan pasangan berurutan dari jarak antara *u* dan setiap *vertex* di *W*, dimana *u* adalah *vertex* pada *G* dan jarak dari dua *vertex* didefinisikan sebagai panjang lintasan (*path*) terpendek antara dua *vertex*. Himpunan *W* disebut himpunan pembeda lokal apabila representasi setiap dua *vertex* yang saling *adjacent* berbeda terhadap *W*. Himpunan pembeda lokal dengan jumlah anggota minimal disebut basis metrik lokal dan banyaknya anggota pada basis disebut dimensi metrik lokal.

Okamoto *et al*. (2010) memperkenalkan konsep dimensi metrik lokal sebagai pengembangan dari konsep dimensi metrik. Salah satu hasilnya yaitu suatu graf terhubung *nontrivialG* memiliki dimensi metrik lokal $n - 1$ jika dan hanya jika $G = K_n$. Selain itu, *G* memiliki dimensi metrik lokal 1 jika dan hanya jika *G* adalah graf bipartit. Kristina dkk. (2014) menentukan dimensi metrik lokal pada graf hasil operasi *comb* dari graf siklus dan graf bintang, sedangkan Ningsih dkk. (2014) menentukan dimensi metrik lokal pada graf hasil kali *comb* dari graf siklus dan graf lintasan. Penelitian tentang dimensi metrik lokal hasil kali korona pada suatu graf dilakukan oleh Rodríguez-Velázquez *et al*. (2016). Cahyabudi dan Kusmayadi (2017) menentukan dimensi metrik lokal pada graf *lollipop*, graf *web*, dan graf *friendship*. Budianto dan Kusmayadi (2018) menentukan dimensi metrik lokal pada graf *starbarbell*, graf $K_m \odot P_n$, dan graf *Möbius ladder*.

Hasil penelitian tersebut digunakan sebagai acuan untuk meneliti dimensi metrik lokal pada graf *musical* dan graf *stacked prism*. Penelitian ini diharapkan dapat menjadi pengembangan ilmu matematika dan menambah kajian ilmu matematika khususnya dalam teori graf yang berkaitan dengan dimensi metrik lokal.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Berikut langkah-langkah yang dilakukan dalam menentukan dimensi metrik lokal pada graf musical dan graf stacked prism.

1. Menentukan himpunan *W* pada graf *musical* dan graf *stacked prism*.
2. Menghitung jarak setiap *vertex* terhadap *W* yang telah dientukan sedemikian sehingga setiap dua *vertex* berbeda yang saling *adjacent* pada graf *musical* dan graf *stacked prism* mempunyai representasi yang berbeda terhadap *W*.
3. Menentukan dimensi metrik lokal dan pola umum dimensi metrik lokal pada graf *musical* dan graf *stacked prism*.
4. Membuat lema dan/atau teorema beserta pembuktian berdasarkan hasil yang diperoleh.
5. Membuat kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bagian ini dibahas mengenai dimensi metrik lokal pada graf *musical* dan graf *stacked prism* sehingga diperoleh rumus umum dan pembuktiannya.

A. Dimensi Metrik Lokal pada Graf Musical

Knuth (2008) mendefinisikan graf *musical* adalah graf dengan *order* 24 yang disusun berdasarkan tangga nada. Pada umumnya, graf *musical*MG_n ber-*order*$2n$ untuk $n \geq 3$. Graf *musical* terdiri dari *cycle*C_n^1 dengan himpunan *vertex*$V(C_n^1) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dan terhubung dengan *cycle*C_n^2 dengan himpunan *vertex*$V(C_n^2) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dimana C_n^1 adalah *cycle* pertama sedangkan C_n^2 adalah *cycle* kedua yang masing-masing ber-*order* n.

Berikut adalah teorema yang diberikan oleh Okamoto et al. (2010) dan dua lema yang digunakan untuk membuktikan teorema selanjutnya.

Teorema 1.1.*Diberikan G merupakan sebuah graf terhubung nontrivial ber-order n, maka* $\dim_l(G) = n - 1$ *jika dan hanya jika* $G = K_n$ *dan* $\dim_l(G) = 1$ *jika dan hanya jika G adalah graf bipartit.*

Lema 1.1.*Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 3$, *jika W adalah himpunan pembeda lokal dari graf musical* MG_n, *maka* $|W| \geq n$.

Bukti. Diberikan graf *musical* dengan himpunan *vertex*$V(MG_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Andaikan $|W| < n$. Pada MG_n, setiap *vertex*u_i *adjacent* dengan *vertex*v_i untuk $1 \leq i \leq n$, sehingga diperoleh $d(u_i, v_i) = d(u_j, v_j) = 1$ dengan $i \neq j$. Jika diambil $W \subset V(MG_n) - \{u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$, maka diperoleh representasi $r(u_n|W) = r(v_n|W) = (1,2, \dots, \frac{n}{2}, \frac{n-2}{2}, \frac{n-4}{2}, \dots, 1)$ untuk n genap dan $r(u_n|W) = r(v_n|W) = (1,2, \dots, \frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \frac{n-5}{2}, \dots, 1)$ untuk n ganjil. u_n dan v_n merupakan dua *vertex* yang saling *adjacent*, sehingga kontradiksi dengan pengandaian. Terbukti bahwa $|W| \geq n$.

Lema 1.2.*Untuk setiap bilangan bulat* $n > 3$, *jika* $W = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V(MG_n)$, *maka W adalah himpunan pembeda lokal dari graf musical* MG_n.

Bukti. Himpunan *vertex* pada MG_n membentuk *cycle* $u_1, u_2, \dots, u_n, u_1$ dan *cycle* $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ serta berdasarkan Lema 1.2 setiap *vertex* u_i *adjacent* dengan *vertex*v_i. Diperoleh representasi dari setiap *vertex* pada graf *musical* terhadap *W*.

1. Untuk *n* genap

   Untuk *n* genap diperoleh representasi setiap *vertex*$V(MG_n)$ terhadap *W* yaitu

$$r(u_1|W) = \left(0,1,2, \dots, \frac{n-4}{2}, \frac{n-2}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n-2}{2}, \frac{n-4}{2}, \dots, 2,1\right),$$

$$r(u_2|W) = \left(1,0,1,2, \dots, \frac{n-4}{2}, \frac{n-2}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n-2}{2}, \frac{n-4}{2}, \dots, 2\right),$$

$$\vdots$$

$$r\left(u_{\frac{n+2}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n}{2}, \frac{n-2}{2}, \frac{n-4}{2}, \dots, 2,1,0,1,2, \dots, \frac{n-4}{2}, \frac{n-2}{2}\right),$$

$$r\left(u_{\frac{n+4}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-2}{2},\frac{n}{2},\frac{n-2}{2},\frac{n-4}{2},\dots,2,1,0,1,2,\dots,\frac{n-4}{2}\right),$$
$$\vdots$$
$$r(u_{n-1}|W) = \left(2,\dots,\frac{n-4}{2},\frac{n-2}{2},\frac{n}{2},\frac{n-2}{2},\frac{n-4}{2},\dots,2,1,0,1\right),$$
$$r(u_n|W) = \left(1,2,\dots,\frac{n-4}{2},\frac{n-2}{2},\frac{n}{2},\frac{n-2}{2},\frac{n-4}{2},\dots,2,1,0\right),$$
$$r(v_1|W) = \left(1,1,2,\dots,\frac{n-4}{2},\frac{n-2}{2},\frac{n}{2},\frac{n-2}{2},\frac{n-4}{2},\dots,3,2,1\right),$$
$$r(v_2|W) = \left(1,1,1,2,\dots,\frac{n-4}{2},\frac{n-2}{2},\frac{n}{2},\frac{n-2}{2},\frac{n-4}{2},\dots,3,2\right),$$
$$r(v_3|W) = \left(2,1,1,1,2,\dots,\frac{n-4}{2},\frac{n-2}{2},\frac{n}{2},\frac{n-2}{2},\frac{n-4}{2},\dots,3\right),$$
$$\vdots$$
$$r\left(v_{\frac{n+2}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n}{2},\frac{n-2}{2},\frac{n-4}{2},\dots,3,2,1,1,1,2,\dots,\frac{n-4}{2},\frac{n-2}{2}\right),$$
$$r\left(v_{\frac{n+4}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-2}{2},\frac{n}{2},\frac{n-2}{2},\frac{n-4}{2},\dots,3,2,1,1,1,2,\dots,\frac{n-4}{2}\right),$$
$$\vdots$$
$$r(u_{n-1}|W) = \left(2,\dots,\frac{n-4}{2},\frac{n-2}{2},\frac{n}{2},\frac{n-2}{2},\frac{n-4}{2},\dots,3,2,1,1,1\right),$$
$$r(u_n|W) = \left(1,2,\dots,\frac{n-4}{2},\frac{n-2}{2},\frac{n}{2},\frac{n-2}{2},\frac{n-4}{2},\dots,3,2,1,1\right).$$

2. Untuk *n* ganjil

   Untuk *n* ganjil diperoleh representasi setiap *vertex*$V(MG_n)$ terhadap W yaitu

$$r(u_1|W) = \left(0,1,2,\dots,\frac{n-5}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2},\dots,2,1\right),$$
$$r(u_2|W) = \left(1,0,1,2,\dots,\frac{n-5}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2},\dots,2\right),$$
$$\vdots$$
$$r\left(u_{\frac{n+1}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2},\dots,2,1,0,1,2,\dots,\frac{n-5}{2},\frac{n-3}{2}\right),$$
$$r\left(u_{\frac{n+3}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2},\dots,2,1,0,1,2,\dots,\frac{n-5}{2},\frac{n-3}{2}\right),$$
$$r\left(u_{\frac{n+5}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-3}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2},\dots,2,1,0,1,2,\dots,\frac{n-5}{2}\right),$$
$$\vdots$$
$$r(u_{n-1}|W) = \left(2,\dots,\frac{n-5}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2},\dots,2,1,0,1\right),$$

$$r(u_n|W) \quad = \left(1,2,\dots,\frac{n-5}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2},\dots,2,1,0\right),$$
$$r(v_1|W) \quad = \left(1,1,2,\dots,\frac{n-5}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2},\dots,3,2,1\right),$$
$$r(v_2|W) \quad = \left(1,1,1,2,\dots,\frac{n-5}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2},\dots,3,2\right),$$
$$r(v_3|W) \quad = \left(2,1,1,1,2,\dots,\frac{n-5}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2},\dots,3\right),$$
$$\vdots$$
$$r\left(v_{\frac{n+1}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2},\dots,3,2,1,1,1,2,\dots,\frac{n-5}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-1}{2}\right),$$
$$r\left(v_{\frac{n+3}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2},\dots,3,2,1,1,1,2,\dots,\frac{n-5}{2},\frac{n-3}{2}\right),$$
$$r\left(v_{\frac{n+5}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-3}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2},\dots,3,2,1,1,1,2,\dots,\frac{n-5}{2}\right),$$
$$\vdots$$
$$r(u_{n-1}|W) = \left(2,\dots,\frac{n-5}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2},\dots,3,2,1,1,1\right),$$
$$r(u_n|W) \quad = \left(1,2,\dots,\frac{n-5}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2},\dots,3,2,1,1\right).$$

Setiap pasangan *vertex* yang saling *adjacent* dalam graf *musical* MG_n memiliki representasi yang berbeda terhadap W, oleh karena itu $W = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ merupakan himpunan pembeda lokal dari MG_n.

Teorema 1.2. *Jika MG_n adalah graf musical dengan $n \geq 3$, maka*

$$\dim_l(MG_n) = \begin{cases} 5, & n = 3; \\ n, & n > 3. \end{cases}$$

Bukti. Diberikan graf *musical* dengan himpunan *vertex* $V(MG_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Dimensi metrik lokal pada MG_n terdiri dari dua kasus, yaitu untuk $n = 3$ dan $n > 3$.

Kasus 1. $n = 3$

Graf *musical* MG_n dengan $n = 3$ merupakan graf lengkap K_{2n}, dengan Teorema 1.1 dapat disimpulkan bahwa $\dim_l(MG_n) = 2n - 1 = 5$.

Kasus 2. $n > 3$

Berdasarkan Lema 1.1 dan Lema 1.2 terbukti bahwa jika MG_n adalah graf *musical* dengan $n > 3$, maka $\dim_l(MG_n) = n$.

B. Dimensi Metrik Lokal pada Graf Stacked Prism

Gallian (2007) mendefinisikan graf *stacked prism*$Y_{m,n}$ adalah graf yang diperoleh dari hasil *cartesian product* pada graf *cycle* C_m dan graf lintasan P_n . Graf *stacked prism*$Y_{m,n}$ merupakan graf dengan mn*vertex* dan $m(2n-1)$*edge*.

Teorema 2.1.*Jika $Y_{m,n}$ adalah graf stacked prism dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 1$ maka*

$$\dim_l(Y_{m,n}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } m \text{ genap;} \\ 2, & \text{untuk } m \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Bukti. Diberikan graf *stacked prism* dengan himpunan *vertex*$V(Y_{m,n}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{mn}\}$. Dimensi metrik lokal pada $Y_{m,n}$ terdiri dari dua kasus, yaitu untuk *m* genap dan *m* ganjil.

Kasus 1. *m* genap, $m \geq 3$

Misalkan himpunan *vertex*$V(Y_{m,n})$ dipartisi menjadi dua himpunan *vertex*.

1. Untuk n genap

$$V_1 = \{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{m-1}, v_{m+2}, v_{m+4}, \cdots, v_{2m}, v_{2m+1}, v_{2m+3}, \cdots, v_{3m-1}, v_{3m+2}, v_{3m+4}, \cdots, v_{4m}, \cdots, v_{mn}\},$$

$$V_2 = \{v_2, v_4, v_6, \dots, v_m, v_{m+1}, v_{m+3}, \dots, v_{2m-1}, v_{2m+2}, v_{2m+4}, \cdots, v_{3m}, v_{3m+1}, v_{3m+3}, \cdots, v_{4m-1}, \cdots, v_{mn-1}\}.$$

2. Untuk n ganjil

$$V_1 = \{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{m-1}, v_{m+2}, v_{m+4}, \cdots, v_{2m}, v_{2m+1}, v_{2m+3}, \cdots, v_{3m-1}, v_{3m+2}, v_{3m+4}, \cdots, v_{4m+1}, v_{4m+3}, \cdots, v_{5m-1}, \cdots, v_{mn-1}\},$$

$$V_2 = \{v_2, v_4, v_6, \dots, v_m, v_{m+1}, v_{m+3}, \dots, v_{2m-1}, v_{2m+2}, v_{2m+4}, \cdots, v_{3m}, v_{3m+1}, v_{3m+3}, \cdots, v_{4m+2}, v_{4m+4}, \cdots, v_{5m}, \cdots, v_{mn-1}\}.$$

Setiap *vertex* pada dua partisi tersebut tidak saling *adjacent*, artinya $Y_{m,n}$ dengan *m* genap dan $m \geq 3$ adalah graf bipartit. Berdasarkan Teorema 1.1 dapat disimpulkan bahwa $\dim_l(Y_{m,n}) = 1$.

Kasus 2.*m* ganjil, $m \geq 3$

Jika $W = \{v_1, v_2\} \subset V(Y_{m,n})$, maka diperolehrepresentasi dari setiap *vertex* pada graf *stacked prism* terhadap *W*.

$$v_1 = (0,1),$$
$$v_2 = (1,0),$$
$$v_3 = (2,1),$$
$$\vdots$$
$$v_{\frac{m+1}{2}} = (\tfrac{m-1}{2}, \tfrac{m-3}{2}),$$

$$v_{\frac{3m+5}{2}} = \left(\frac{m-1}{2}, \frac{m+1}{2}\right),$$
$$v_{\frac{3m+7}{2}} = \left(\frac{m-3}{2}, \frac{m-1}{2}\right),$$
$$\vdots$$
$$v_{2m} = (2,3),$$
$$\vdots$$

$$v_{\frac{m+3}{2}} = \left(\frac{m-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right),$$
$$v_{\frac{m+5}{2}} = \left(\frac{m-3}{2}, \frac{m-1}{2}\right),$$
$$v_{\frac{m+7}{2}} = \left(\frac{m-5}{2}, \frac{m-3}{2}\right),$$
$$\vdots$$
$$v_m = (1,2),$$
$$v_{m+1} = (1,2),$$
$$v_{m+2} = (2,1),$$
$$v_{m+3} = (3,2),$$
$$\vdots$$
$$v_{\frac{3m+1}{2}} = \left(\frac{m+1}{2}, \frac{m-1}{2}\right),$$
$$v_{\frac{3m+3}{2}} = \left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right),$$

$$v_{(n-1)m} = (n-1, n),$$
$$v_{(n-1)m+1} = (n-1, n),$$
$$v_{(n-1)m+2} = (n, n-1),$$
$$v_{(n-1)m+3} = (n+1, n),$$
$$\vdots$$
$$v_{\frac{(2n-1)m+1}{2}} = \left(\frac{m+2n-3}{2}, \frac{m+2n-5}{2}\right),$$
$$v_{\frac{(2n-1)m+3}{2}} = \left(\frac{m+2n-3}{2}, \frac{m+2n-3}{2}\right),$$
$$v_{\frac{(2n-1)m+5}{2}} = \left(\frac{m+2n-5}{2}, \frac{m+2n-3}{2}\right),$$
$$v_{\frac{(2n-1)m+7}{2}} = \left(\frac{m+2n-7}{2}, \frac{m+2n-5}{2}\right),$$
$$\vdots$$
$$v_{mn} = (n, n+1).$$

Setiap pasangan *vertex* yang saling *adjacent* dalam graf *stacked prism*$Y_{m,n}$ memiliki representasi yang berbeda terhadap *W*. Menurut Chartrand *et al.* (2016), sebuah graf *nontrivial* adalah graf bipartit jika dan hanya jika graf tersebut tidak memuat *cycle* ganjil. Graf *stacked prism*$Y_{m,n}$ dengan *m* ganjil dan $m \geq 3$ bukan graf bipartit. Jadi W merupakan himpunan pembeda lokal $Y_{m,n}$, terbukti bahwa $dim_l(Y_{m,n}) = 2$.

SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Dimensi metrik lokal pada graf *musical*MG_n yaitu
$$\dim_l(MG_n) = \begin{cases} 5, & n = 3; \\ n, & n > 3. \end{cases}$$
2. Dimensi metrik lokal pada graf stacked prism $Y_{m,n}$ yaitu
$$\dim_l(Y_{m,n}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } m \text{ genap;} \\ 2, & \text{untuk } m \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini, dapat mengembangkan penelitian pada kelas-kelas graf lain misal graf *generalized* Jahangir atau graf *generalized* Petersen. Selain itu juga dapat diaplikasikan dalam graf hasil operasi, misal operasi *join* $(C_m + P_n)$ atau operasi *edge* korona $(C_m \diamond P_n)$.

DAFTAR PUSTAKA

‘Budianto, W.T., and T.A. Kusmayadi. (2018). *The Local Metric Dimension of Starbarbell Graph,* $K_m \odot P_n$ *Graph, and Möbius ladder Graph*. *Journal of Physics: Conference Series* 1008 012050.

Cahyabudi, A.N., and T.A. Kusmayadi. (2017). On the Local Metric Dimension of a Lollipop Graph, a Web Graph, and a Friendship *Graph*. *Journal of Physics: Conference Series* 909 012039.

Chartrand. G., L. Lesniak, and P. Zhang. (2016). *Graphs and Digraphs,* 6^{th} *ed.* New York, CRC Press.

Gallian, J. A. (2007). *Dynamic Survey DS6: Graph Labelling. Electronic Journal Combinatorics*, 3, 1-58.

Knuth, D.E. (2008). *The Art of Computer Programming: Introduction to Combinatorial Algorithms and Boolean Functions*, vol. 4. California, Addison-Wesley.

Kristina, M., N. Estuningsih, dan L. Susilowati. (2014). Dimensi Metrik Lokal pada Graf hasil Kali *Comb* dari Graf Siklus dan Graf Bintang. Jurnal Matematika, 1(1), 1-9.

Ningsih, E. U. S., N. Estuningsih, dan L. Susilowati. (2014). Dimensi Metrik Lokal pada Graf Hasil Kali *Comb* dari Graf Siklus dan Graf Lintasan. Jurnal Matematika, 1(1), 24-33.

Okamoto, F., B. Phinezy, and P. Zhang. (2010). *The Local Metric Dimension of a Graph. Mathematica Bohemica*, 135(3), 239-255.

Rodríguez-Velázquez, J. A., G.A. Barragán-Ramírez, and C. G. Gómez. (2016). *On the Local Metric Dimension of Corona Product Graphs. Bull. Malays. Math. Sci. Soc*, 39(2), 157-173.