E-ISSN 2621–086X

Indonesian Journal of Applied Statistics

Vol. 7, No. 1, pp. 50-59, May 2024
Journal homepage: https://jurnal.uns.ac.id/ijas/index
doi: 10.13057/ijas.v7i1.79911

Estimator Cramer Von Mises bagi Parameter Distribusi Kumaraswamy-Lindley

Bagus Arya Saputra[1*], Zani Anjani Rafsanjani[2]
[1]Program Studi Statistika, Universitas Diponegoro, Semarang, Indonesia
[2]Program Studi Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang, Indonesia

***Corresponding author:** baryasaputra@live.undip.ac.id

Submitted: 25-Oct-2023 **Revised:** 4-Jun-2024 **Accepted:** 15-Jun-2024

Abstract. *The Kumaraswamy-Lindley (KL) distribution is a combination of the Lindley distribution and the Kumaraswamy distribution. The KL distribution is widely used to examine lifetime data. The importance of the application of the KL distribution in explaining lifetime data makes it necessary to estimate distribution parameters well. Therefore, this research will discuss the Cramer Von Mises Estimator (ECM) for the Kumaraswamy-Lindley distribution parameters. The formula for the ECM is obtained and the simulation is carried out using the same initial parameters with different generation sample sizes. The simulation results show that for the same initial parameters, estimation with a larger sample size has better results.*

Keywords: *kumaraswamy-lindley; estimasi; cramer von mises*

1. PENDAHULUAN

Distribusi Kumaraswamy-Lindley (KL) merupakan penggabungan dari distribusi Lindley [1] dengan distribusi Kumaraswamy [2]. Untuk sebarang fungsi distribusi kumulatif (FDK) $G(x)$, Corderio dan Castro [3] mengusulkan distribusi Kumaraswamy-G yang memiliki parameter distribusi sama dengan distribusi dengan FDK $G(x)$ ditambah dengan dua parameter bentuk bernilai positif. Distribusi KL dibentuk dengan menggunakan FDK $G(x)$ dari distribusi Lindley dan digabungkan dengan distribusi Kumaraswamy-G [4].

Penelitian terkait distribusi Kumaraswamy-Lindley sudah banyak dilakukan. Çakmakyapan et al. [5] mengajukan distribusi KL sebagai distribusi durasi *lifetime* pelanggan baru. Oluyede et al. [6] memaparkan diskusi mengenai perumuman kelas distribusi KL dengan aplikasi data *lifetime*. Samy dan Salah [7] menjelaskan sifat-sifat matematis baru bagi distribusi KL. Salah satu aplikasi distribusi KL adalah untuk membentuk model data *lifetime*. Estimasi parameter diperlukan untuk memperoleh model yang baik. Oleh karena itu, penelitian ini akan membahas mengenai *Estimator* Cramer Von Mises (ECM) bagi parameter distribusi Kumaraswamy-Lindley.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Lindley

Variabel acak X dikatakan berdistribusi Lindley jika X memiliki fungsi kepadatan peluang (FKP) seperti pada Persamaan 1:

$$g(x;\eta) = \frac{\eta^2}{\eta+1}(1+x)e^{-\eta x}, \tag{1}$$

dan fungsi distribusi kumulatif (FDK) seperti pada Persamaan 2:

$$G(x;\eta) = 1 - \left(1 + \frac{\eta x}{\eta+1}\right)e^{-\eta x}, \tag{2}$$

untuk $x > 0$ dan $\eta > 0$.

2.2 Distribusi Kuwaraswamy-Lindley (KL)

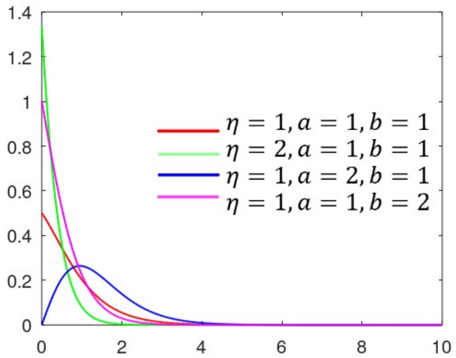
Misalkan $G(x;\eta)$ FDK dari distribusi Lindley seperti pada Persamaan 2. Distribusi KL memiliki FDK seperti pada Persamaan 3:

$$F(x;\eta,a,b) = 1 - \left(1 - \left(1 - \left(1 + \frac{\eta x}{\eta+1}\right)e^{-\eta x}\right)^a\right)^b, \tag{3}$$

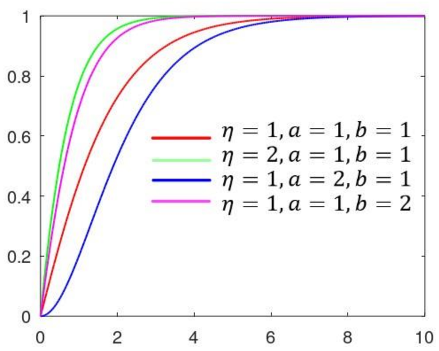
dan FKP seperti pada Persamaan 4:

$$\begin{aligned} f(x;\eta,a,b) = ab\frac{\eta^2}{\eta+1}(1+x)e^{-\eta x}\left(1 - \left(1 + \frac{\eta x}{\eta+1}\right)e^{-\eta x}\right)^{a-1} \\ \left(1 - \left(1 - \left(1 + \frac{\eta x}{\eta+1}\right)e^{-\eta x}\right)^a\right)^{b-1}, \end{aligned} \tag{4}$$

untuk $x > 0, \eta > 0, a > 0$, dan $b > 0$. Gambar 1 dan Gambar 2 menunjukkan beberapa contoh grafik FKP dan FDK distribusi KL untuk nilai-nilai η, a, dan b tertentu.



Gambar 1. Grafik FKP distribusi KL



Gambar 2. Grafik FDK distribusi KL

2.3 Statistik Terurut

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ suatu sampel acak berukuran n yang memiliki FDK $F(x)$. Jika $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$ statistik terurut dari sampel acak tersebut, maka FDK dari statistik terurut tersebut tertera pada Persamaan 5:

$$F\left(x_{(j)}\right) = \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} [F(x)]^k [1 - F(x)]^{n-k} \tag{5}$$

untuk $1 \leq j \leq n$ [8].

2.4 *Estimator* Cramer von Mises

Estimasi Cramer Von Mises (ECM) merupakan salah satu metode estimasi parameter lewat meminimumkan jarak antara FDK statistik terurut dengan fungsi distribusi empiris. Jika statistik terurut $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$ dengan parameter η yang ingin diestimasi memiliki FDK $F\left(x_{(j)}; \eta\right)$ untuk $1 \leq j \leq n$, maka parameter η dapat diestimasi dengan meminimumkan fungsi pada Persamaan 6:

$$C(\eta) = \frac{1}{12n} + \sum_{j=1}^{n} \left[F\left(x_{(j)}; \eta\right) - \frac{2j-1}{2n}\right]^2 \tag{6}$$

terhadap parameter η [9].

3. METODE PENELITIAN

Studi literatur dilakukan untuk menentukan formula ECM bagi parameter distribusi KL. Setelah formula didapat, dilakukan simulasi estimasi parameter menggunakan metode numerik. Pada simulasi ini, ukuran sampel dan nilai parameter dipilih untuk memeriksa kinerja ECM dalam melakukan estimasi parameter distribusi KL. Langkah-langkah metode numerik yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Pilih ukuran sampel $n = 10000$ dan nilai parameter dipilih $\eta = a = b = 1$.
2. Sampel dibangkitkan melalui prosedur *slice sampling* [10].
3. Parameter-parameter distribusi dihitung dengan menggunakan ECM.
4. Ulangi langkah 1-3 sebanyak $N = 30$ kali.
5. *Root Mean Square Error* (RMSE) dihitung dengan Persamaan 7:

$$RMSE(\hat{\phi}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\hat{\phi}_i - \phi\right)^2} \tag{7}$$

   dengan $\hat{\phi}$ menyatakan *estimator* bagi parameter ϕ dan $\hat{\phi}_i$ menyatakan *estimator* bagi parameter ϕ pada perhitungan ke-i.
6. Ulangi dari langkah 1 dengan mengganti ukuran sampel $n = 50000$.
7. Ulangi langkah 1-5 dengan mengganti parameter awal $\eta = b = 1$ dan $a = 2$.

Perangkat lunak yang digunakan untuk melakukan metode numerik adalah Octave 8.3.0.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$ statistik terurut dari sampel acak $X_1, X_2, \dots, X_n$ yang berdistribusi KL dan memiliki parameter $\eta, a,$ dan b . Misalkan pula $F(x; \eta, a, b)$ dan

$F(x_{(j)};\eta,a,b)$ masing-masing menyatakan FDK dari sampel acak dan FDK dari statistik terurut. Parameter $\eta, a,$ dan b dapat diestimasi menggunakan ECM dengan meminimumkan fungsi seperti pada Persamaan 8:

$$C(\eta,a,b)=\frac{1}{12n}+\sum_{j=1}^{n}\left[F\left(x_{(j)};\eta,a,b\right)-\frac{2j-1}{2n}\right]^2 \tag{8}$$

terhadap masing-masing parameter $\eta, a,$ dan b. *Estimator* parameter $\eta, a,$ dan b dapat diperoleh dengan mencari solusi Persamaan 9, Persamaan 10, dan Persamaan 11

$$\frac{\partial C}{\partial \eta}=2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F\left(x_{(j)};\eta,a,b\right)}{\partial \eta}\cdot\left[F\left(x_{(j)};\eta,a,b\right)-\frac{2j-1}{2n}\right]=0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial C}{\partial a}=2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F\left(x_{(j)};\eta,a,b\right)}{\partial a}\cdot\left[F\left(x_{(j)};\eta,a,b\right)-\frac{2j-1}{2n}\right]=0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial C}{\partial b}=2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F\left(x_{(j)};\eta,a,b\right)}{\partial b}\cdot\left[F\left(x_{(j)};\eta,a,b\right)-\frac{2j-1}{2n}\right]=0 \tag{11}$$

Menurut teorema binomial [11], dapat diperoleh Persamaan 12, Persamaan 13, dan Persamaan 14

$$\frac{\partial F\left(x_{(j)};\eta,a,b\right)}{\partial \eta}=\frac{(n-1)!}{(j-1)!\,(n-j)!}\frac{\partial F(x;\eta,a,b)}{\partial \eta}[F(x;\eta,a,b)]^{j-1}[1-F(x;\eta,a,b)]^{n-j} \tag{12}$$

$$\frac{\partial F\left(x_{(j)};\eta,a,b\right)}{\partial a}=\frac{(n-1)!}{(j-1)!\,(n-j)!}\frac{\partial F(x;\eta,a,b)}{\partial a}[F(x;\eta,a,b)]^{j-1}[1-F(x;\eta,a,b)]^{n-j} \tag{13}$$

$$\frac{\partial F\left(x_{(j)};\eta,a,b\right)}{\partial b}=\frac{(n-1)!}{(j-1)!\,(n-j)!}\frac{\partial F(x;\eta,a,b)}{\partial b}[F(x;\eta,a,b)]^{j-1}[1-F(x;\eta,a,b)]^{n-j} \tag{14}$$

dengan:

$$\frac{\partial F(x;\eta,a,b)}{\partial \eta}=\frac{1}{(\eta+1)^2}\left(ab\eta x e^{-\eta x}(\eta x+\eta+x+2)\left(1-\left(1+\frac{\eta x}{\eta+1}\right)e^{-\eta x}\right)^{a-1}\left(1-\left(1-\left(1+\frac{\eta x}{\eta+1}\right)e^{-\eta x}\right)^{a}\right)^{b-1}\right) \tag{15}$$

$$\frac{\partial F(x;\eta,a,b)}{\partial a}=b\left(1-\left(1+\frac{\eta x}{\eta+1}\right)e^{-\eta x}\right)^{a}\ln\left(1-\left(1+\frac{\eta x}{\eta+1}\right)e^{-\eta x}\right)\left(1-\left(1-\left(1+\frac{\eta x}{\eta+1}\right)e^{-\eta x}\right)^{a}\right)^{b-1} \tag{16}$$

$$\frac{\partial F(x;\eta,a,b)}{\partial b} = -\left(1-\left(1-\left(1+\frac{\eta x}{\eta+1}\right)e^{-\eta x}\right)^{a}\right)^{b} \ln\left(1-\left(1-\left(1+\frac{\eta x}{\eta+1}\right)e^{-\eta x}\right)^{a}\right) \tag{17}$$

Parameter $\eta, a,$ dan b dicari dengan simulasi metode numerik. RMSE dihitung pada tiap estimasi dan ditampilkan pada Tabel 1 dan Tabel 2.

Tabel 1. Hasil simulasi ukuran sampel $n = 10000$ dan nilai parameter $\eta = a = b = 1$

Estimasi ke-	$\hat{\eta}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$
1	1,072	1,017	0,916
2	0,972	1,010	1,041
3	1,130	1,011	0,858
4	0,528	0,951	2,332
5	0,716	0,979	1,540
6	1,436	1,055	0,640
7	1,370	0,998	0,660
8	1,190	1,046	0,807
9	1,082	0,996	0,906
10	1,024	0,978	0,984
11	1,260	1,028	0,750
12	0,734	0,981	1,511
13	1,063	1,017	0,926
14	0,923	1,006	1,123
15	0,973	0,980	1,011
16	0,614	0,960	1,839
17	1,043	0,976	0,939
18	1,051	1,010	0,932
19	0,718	0,957	1,511
20	0,880	0,977	1,159
21	1,117	1,033	0,864
22	1,122	1,017	0,857
23	1,154	1,025	0,833
24	1,237	1,032	0,771
25	1,050	1,029	0,951
26	1,095	1,026	0,896
27	1,374	1,048	0,680
28	0,572	0,929	2,034
29	1,006	0,983	0,967
30	1,090	1,003	0,901

Tabel 1 menunjukkan hasil perhitungan *estimator* $\hat{\eta}, \hat{a},$ dan $\hat{b}$ bagi distribusi KL dengan pembangkitan ukuran sampel $n = 10000$. Dari Tabel 1, dapat dilihat bahwa perhitungan *estimator* $\hat{\eta}, \hat{a},$ dan $\hat{b}$ pada umumnya sudah cukup baik. Namun pada beberapa percobaan, nilai *estimator* cukup jauh dari nilai sebenarnya. Contohnya pada estimasi ke-4, nilai dari *estimator* $\hat{\eta} = 0{,}528$ dan $\hat{b} = 2{,}331$. Nilai tersebut cukup jauh dari nilai parameter sebenarnya. Selanjutnya, RMSE bagi masing-masing parameter adalah

$$RMSE(\hat{\eta}) = \sqrt{\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}(\hat{\eta}_i - 1)^2} = 0{,}227$$

$$RMSE(\hat{a}) = \sqrt{\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}(\hat{a}_i - 1)^2} = 0{,}030$$

$$RMSE(\hat{b}) = \sqrt{\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}\left(\hat{b}_i - 1\right)^2} = 0{,}410$$

Tabel 2. Hasil simulasi ukuran sampel $n = 50000$ dan nilai parameter $\eta = a = b = 1$

Estimasi ke-	$\hat{\eta}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$
1	1,014	1,003	0,976
2	1,068	1,010	0,918
3	1,004	1,004	0,996
4	0,793	0,981	1,356
5	1,052	1,008	0,940
6	0,832	0,987	1,277
7	1,056	1,006	0,924
8	0,836	0,977	1,244
9	1,059	0,997	0,925
10	1,070	1,009	0,918
11	0,835	0,982	1,255
12	1,075	1,015	0,917
13	0,915	0,988	1,118
14	0,903	0,982	1,124
15	1,061	1,000	0,928
16	0,902	0,986	1,133
17	0,920	0,984	1,099
18	1,135	1,027	0,861
19	1,026	0,995	0,953
20	0,824	0,983	1,266
21	0,920	0,989	1,110
22	0,827	0,979	1,273
23	1,060	0,995	0,919
24	1,015	1,000	0,979
25	1,054	1,004	0,936
26	0,867	0,980	1,193
27	1,024	0,994	0,973
28	1,115	1,012	0,876
29	1,051	1,003	0,935
30	0,935	0,988	1,077

Tabel 2 menunjukkan hasil perhitungan *estimator* $\hat{\eta}, \hat{a},$ dan $\hat{b}$ bagi distribusi KL dengan pembangkitan ukuran sampel $n = 50000$. Jika dibandingkan dengan hasil dari Tabel 1, hasil di Tabel 2 memberikan nilai *estimator* yang lebih dekat dengan nilai sebenarnya. Meskipun demikian, pada estimasi ke-4, nilai *estimator* $\hat{\eta} = 0{,}793$ dan $\hat{b} = 1{,}356$. Nilai tersebut masih relatif jauh terhadap nilai parameter yang sebenarnya. RMSE bagi masing-masing parameter adalah

$$RMSE(\hat{\eta}) = \sqrt{\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}(\hat{\eta}_i - 1)^2} = 0{,}103$$

$$RMSE(\hat{a}) = \sqrt{\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}(\hat{a}_i - 1)^2} = 0{,}013$$

$$RMSE(\hat{b}) = \sqrt{\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}\left(\hat{b}_i - 1\right)^2} = 0{,}151$$

Berdasarkan Tabel 1 dan Tabel 2, ukuran sampel berpengaruh terhadap keakuratan perhitungan parameter distribusi KL. Hal ini dapat ditunjukkan dari perbandingan RMSE untuk perhitungan ukuran sampel $n = 10000$ dengan ukuran sampel $n = 50000$. RMSE pada tiap perhitungan parameter untuk ukuran sampel $n = 50000$ semuanya lebih kecil dibandingkan dengan ukuran sampel $n = 10000$.

Untuk memeriksa kinerja ECM lebih lanjut, masing-masing parameter $\eta, a,$ dan b diganti dengan $\eta = b = 1$ dan $a = 2$. RMSE dihitung pada tiap estimasi dan ditampilkan pada Tabel 3 dan Tabel 4.

Tabel 3. Hasil simulasi ukuran sampel $n = 10000$, nilai parameter $\eta = b = 1$ dan $a = 2$

Estimasi ke-	$\hat{\eta}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$
1	0,918	1,912	1,121
2	1,086	2,045	0,876
3	0,926	1,951	1,122
4	0,983	2,017	1,034
5	1,009	2,066	0,990
6	0,968	1,971	1,050
7	1,214	2,286	0,770
8	1,104	2,087	0,856
9	1,034	2,081	0,968
10	1,017	2,005	0,976
11	1,007	2,030	1,000
12	1,053	2,011	0,898
13	0,953	1,940	1,066
14	1,097	2,060	0,851
15	0,919	1,941	1,120
16	1,016	2,052	0,988
17	0,964	1,947	1,067
18	1,040	2,055	0,942
19	0,941	1,942	1,100
20	0,910	1,931	1,157
21	1,047	1,959	0,913
22	0,973	1,989	1,051

Estimasi ke-	$\hat{\eta}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$
23	0,981	1,989	1,015
24	1,107	2,091	0,860
25	0,862	1,872	1,241
26	0,814	1,844	1,332
27	1,187	2,216	0,795
28	0,862	1,924	1,245
29	0,991	2,003	1,008
30	1,114	2,103	0,853

Tabel 3 menunjukkan hasil perhitungan *estimator* $\hat{\eta}, \hat{a},$ dan $\hat{b}$ bagi distribusi KL dengan pembangkitan ukuran sampel $n = 10000$. Perhitungan *estimator* $\hat{\eta}, \hat{a},$ dan $\hat{b}$ pada umumnya sudah cukup baik pada Tabel 3 jika dibandingkan dengan Tabel 1 yang memiliki ukuran sampel yang sama. Selanjutnya, RMSE bagi masing-masing parameter adalah

$$RMSE(\hat{\eta}) = \sqrt{\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}(\hat{\eta}_i - 1)^2} = 0{,}017$$

$$RMSE(\hat{a}) = \sqrt{\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}(\hat{a}_i - 1)^2} = 0{,}017$$

$$RMSE(\hat{b}) = \sqrt{\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}\left(\hat{b}_i - 1\right)^2} = 0{,}025$$

Tabel 4. Hasil simulasi ukuran sampel $n = 50000$, nilai parameter $\eta = b = 1$ dan $a = 2$

Estimasi ke-	$\hat{\eta}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$
1	1,007	2,010	0,992
2	1,011	2,011	0,985
3	1,062	2,058	0,919
4	1,085	2,085	0,889
5	0,967	1,963	1,055
6	0,971	1,983	1,053
7	0,953	1,970	1,080
8	0,950	1,932	1,069
9	1,070	2,085	0,918
10	0,925	1,902	1,096
11	1,015	2,006	0,979
12	1,012	2,021	0,988
13	1,024	2,046	0,975
14	1,021	2,019	0,968
15	1,087	2,068	0,879
16	0,977	1,964	1,024
17	0,974	1,973	1,032
18	1,037	2,009	0,939
19	0,964	1,992	1,065
20	1,042	2,046	0,956

Estimasi ke-	$\hat{\eta}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$
21	0,925	1,933	1,135
22	0,906	1,895	1,142
23	0,953	1,961	1,073
24	0,991	2,000	1,025
25	1,142	2,132	0,819
26	1,015	2,019	0,977
27	0,970	1,980	1,053
28	0,978	1,983	1,033
29	0,940	1,932	1,084
30	0,848	1,861	1,271

Tabel 4 menunjukkan hasil perhitungan *estimator* $\hat{\eta}, \hat{a},$ dan $\hat{b}$ bagi distribusi KL dengan pembangkitan ukuran sampel $n = 50000$. Dibandingkan dengan Tabel 2, hasil di Tabel 4 memberikan nilai *estimator* yang lebih akurat. Selanjutnya, RMSE bagi masing-masing parameter adalah

$$RMSE(\hat{\eta}) = \sqrt{\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}(\hat{\eta}_i - 1)^2} = 0{,}011$$

$$RMSE(\hat{a}) = \sqrt{\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}(\hat{a}_i - 1)^2} = 0{,}011$$

$$RMSE(\hat{b}) = \sqrt{\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}\left(\hat{b}_i - 1\right)^2} = 0{,}016$$

Berdasarkan Tabel 1 sampai dengan Tabel 4, ukuran sampel berpengaruh terhadap keakuratan perhitungan parameter distribusi KL. Hal ini dapat ditunjukkan dari perbandingan RMSE untuk perhitungan ukuran sampel $n = 10000$ dengan ukuran sampel $n = 50000$. RMSE pada tiap perhitungan parameter untuk ukuran sampel $n = 50000$ semuanya lebih kecil dibandingkan dengan ukuran sampel $n = 10000$. Dengan demikian, dibutuhkan ukuran sampel yang cukup besar supaya ECM dapat mengestimasi parameter distribusi KL dengan baik.

5. KESIMPULAN

Pada artikel ini, formula ECM untuk menghitung parameter distribusi KL diperoleh. Simulasi perhitungan *estimator* bagi parameter distribusi KL dilakukan dengan memilih nilai parameter dan ukuran sampel yang berbeda. Hasil simulasi menunjukkan bahwa semakin besar ukuran sampel, semakin akurat estimasi parameter distribusi KL dengan ECM. Dengan demikian, diperlukan ukuran sampel yang cukup besar supaya ECM bekerja dengan baik. Saran untuk penelitian selajutnya adalah mencari formula estimasi parameter distribusi KL lainnya seperti *Anderson-Darling Estimator* dan membandingkannya dengan ECM.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Lindley, D.V. "Fudicial distributions and Bayes theorem". Journal of the Royal Statistical Society B 20:102107. 1958.

[2] P. Kumaraswamy, "A generalized probability density function for double-bounded random processes," *Journal of Hydrology*, vol. 46, no. 1, pp. 79-88, 1980.
[3] G. M. Cordeiro and M. de Castro, "A new family of generalized distributions," *J. Statist. Comput Simul*, vol. 81, pp. 883898, 2011.
[4] F. Merovci and V. Sharma, "The Kumaraswamy Lindley distribution: properties and applications", 2014.
[5] S. Cakmakyapan, G. Ozel, Y. M. H. El Gebaly, and G. G. Hamedani, "The Kumaraswamy Marshall-Olkin log-logistic distribution with application," *Journal of Statistical Theory and Applications*, vol. 17, no. 1, pp. 59–76, 2017.
[6] B. O. Oluyede, T. Yang, and B. Omolo, "A generalized class of Kumaraswamy Lindley distribution with applications to lifetime data," *Journal of Computations & Modelling*, vol. 5, no. 1, pp. 7-70, 2015.
[7] S. Abdelmoezz and S. M. Mohamed, "New mathematical properties of the Kumaraswamy Lindley distribution," *Indonesian Journal of Applied Statistics*, vol. 1, no. 1, pp. 67-77, 2022.
[8] G. Casela and R. L. Berger, *Statistical inference*, Ed. 2nd, USA: Brooks/Cole Cengage Learning, 2002.
[9] S. Ali, D. Sanku, M. H. Tahir, and M. Mansoor, "The comparison of different estimation methods for the parameters of flexible weibull distribution," *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A-Mathematics and Statistics*, vol. 69, no. 1, pp. 794-814, 2020. doi:10.31801/cfsuasmas.597680
[10] R. M. Neal, "Slice Sampling," *The Annals of Statistics*, vol. 31, no. 3, 2003.
[11] R. E. Walpole, R. H. Myers, S. L. Myers, and K. Ye, *Probability & statistics for engineers & ecientists*, 9th Edition. Pearson Education, Inc., 2007.