KAJIAN LITERATUR FASE ADIABATIK UNTUK MEMPERCEPAT DINAMIKA KUANTUM ADIABATIK PADA OSILATOR HARMONIK

Mayasari Hutagalung*, Iwan Setiawan dan Dedy Hamdani
[1]Pendidikan Fisika, FKIP, Universitas Bengkulu, Bengkulu, Indonesia
*mayasarihutagalung15@gmail.com

Received 2022-09-15, Revised 2022-12-22, Accepted 2022-12-28
Available Online 2023-04-06, Published Regularly April 2023

ABSTRACT

This research is a theoretical research by reviewing the literature that discusses the method of accelerating quantum dynamics adiabatically. This method for accelerating quantum dynamics is so- called the fast-forward method. This method was proposed by Masuda and Nakamura in 2010. In this method, the ground state and first excited state wave function is modified by adding an additional term to the wave function which is called the adiabatic phase. This is done so that the time-dependent Schrodinger equation remains fulfilled. The accelerating process is carried out using an adiabatic parameter that goes to zero. Fast-forward method is applied first to get the adiabatic phase. Furthermore, by reviewing the wave function at the ground state and first excited state we get the adiabatic phase which ensures that the harmonic oscillator can move from the initial state to the final state in a shorter time.

Keywords: Adiabatic Phase; Quantum Dynamics; Harmonic Oscillator; Fast-Forward

ABSTRAK

Penelitian ini merupakan penelitian teoritik dengan mengkaji literatur yang membahas tentang metode percepatan dinamika kuantum secara adiabatik. Metode untuk mempercepat dinamika kuantum ini disebut metode *fast-forward*. Metode ini pertama kali di perkenalkan oleh Masuda dan Nakamura pada tahun 2010. Dalam metode ini, fungsi gelombang pada keadaan dasar dan keadaan eksitasi pertama dimodifikasi dengan menambahkan suku tambahan ke fungsi gelombang tersebut yang disebut dengan fase adiabatik. Hal ini dilakukan agar persamaan Schrodinger bergantung waktu tetap terpenuhi. Proses mempercepat dilakukan dengan menggunakan parameter adiabatik yang menuju nol. Metode *fast-forward* diaplikasikan dengan terlebih dahulu untuk mendapatkan fase adiabatik. Selanjutnya dengan meninjau fungsi gelombang pada keadaan terendah dan keadaan eksitasi pertama didapatkan fase adiabatik yang menjamin osilator harmonik dapat bergerak dari keadaan awal ke keadaan akhir dalam waktu yang singkat.

Kata kunci: Fase Adiabatik; Dinamika Kuantum; Osilator Harmonik; *Fast-Forward*

PENDAHULUAN

Mengoptimalkan dan memanipulasi waktu pembuatan produk yaitu salah satu cara yang dapat digunakan untuk mempersingkat waktu perancangan dari produk tersebut[1]. Penelitian sebelumnya melakukan pengembangan konsep untuk mempercepat dinamika kuantum adiabatic[2]. Proses mempercepat waktu sangat penting untuk mempertimbangkan percepatan manipulasi keadaan kuantum untuk tujuan manufaktur dan untuk inovasi teknologi[3]. Manipulasi nanoteknologi bertujuan untuk menyesuaikan potensi atau konfigurasi yang bergantung pada dinamika fungsi gelombang. Konsep adiabatik diusulkan untuk menghasilkan produk dalam waktu yang cepat dengan tidak mengubah ciri dari sistem [1], [4].

Pada artikel ini, telah dilakukan pengembangan konsep untuk mempercepat dinamika kuantum dengan tidak mengubah ciri dari system yaitu dinamika kuantum adiabatik. Metode yang dilakukan yaitu melalui metode *fast-forward* yang merupakan metode untuk menghasilkan suatu produk dengan mempersingkat skala waktu seperti proyeksi film cepat di layer[5]. Teori *fast-forward* dikembangkan lebih lanjut untuk dinamika kuantum kuasi-statis atau adiabatic[6]. Sistem kuantum adiabatik merupakan benda mikro yang bersifat mikroskopis. Maksudnya ialah benda-benda yang tidak dapat dilihat secara langsung oleh mata telanjang, seperti neutron, proton, atom, elektron, dan sebagainya. Salah satu contoh sistem adiabatik yaitu upaya memindahkan suatu partikel mikro material dari posisi awal ke posisi yang lain dalam waktu yang singkat[7] untuk mempercepat sistem mikroskopis tersebut, sistem perlu dipertahankan dengan metode adiabatic[8]. Memanipulasi dan mengoptimalkan dinamika sistem yang diberikan secara efektif merupakan salah satu subjek eksperimental dan teoritis besar dalam teknologi saat ini dan masa depan[9].

Penelitian sebelumnya telah melakukan pengembangan konsep dinamika spin kuantum adiabatik dipercepat[7]. Selain teori *fast-forward*, ada metode lain juga yang bertujuan untuk mempercepat proses kuantum adiabatik yaitu *shortcut to adiabaticity*[4].

Pada mekanika klasik, osilator harmonik dapat diselesaikan dengan menggunakan hubungan Hukum Hooke dan Hukum II Newton, tetapi secara kuantum suatu sistem partikel yang berosilasi harmonik dapat diselesaikan dengan mentransformasikan persamaan Schrödinger tak bergantung waktu dalam satu dimensi[10]. Penelitian sebelumnya menyatakan bahwa energi osilator harmonik didapatkan dengan menyelesaikan persamaan gelombang Schrodinger osilator harmonik menggunakan fungsi pembangkit dari fungsi Hermit. Disebut sebagai fungsi pembangkit karena fungsi ini dapat membangkitkan fungsi Hermit[11]. Suatu sistem fisis mikroskopis yang berdimensi atom pada umumnya dimulai dengan mendefinisikan persamaan Schrödinger yang sesuai untuk sistem tersebut. Selanjutnya dengan menyelesaikan persamaan ini untuk syarat batas yang diberikan, energi eigen dan fungsi gelombang yang menggambarkan keadaan sistem tersebut dapat diketahui. Masuda dan Nakamura mempercepat proses adiabatik dengan metode *fast-forward* untuk mempercepat dinamika keadaan[12]. Hal ini dilakukan dengan mendapatkan fase adiabatik serta potensial tambahan.

Pada penelitian ini peneliti mencoba mengaplikasikan teori *fast-forward* untuk mempercepat dinamika kuantum dengan meninjau osilator harmonik. Teori ini bertujuan untuk mempercepat evolusi kuantum yang diketahui dan untuk mendapatkan keadaan target yang diinginkan pada skala waktu yang lebih pendek, dengan mempercepat dinamika kuantum standar[7]. Upaya untuk mempercepat evolusi kuantum pada osilator harmonik dilakukan dengan mendapatkan fase adiabatik . Fase adiabatik ini akan didapatkan pada keadaan energi dasar *(ground state)* dan keadaan eksitasi pertama *(first excited state)*. Proses adiabatik terjadi ketika parameter eksternal Hamiltonian dari sistem diubah secara adiabatic[13]. Menurut definisinya, adiabatik terjadi ketika keadaan sistem kuantum yang dijelaskan oleh Hamiltonian $H(t)$ yang bergantung pada waktu[14]. Pengaplikasian dari teori *fast-forward* dapat ditemukan dalam mempercepat dinamika partikel Dirac, konstruksi dinamis invarian adiabatik klasik dan dinamika spin kuasi-adiabatik dari dinamika stokastik[15]**.** Penelitian ini memfokuskan pada upaya mendapatkan energi tambahan pada sistem osilator harmonik kuantum dengan menggunakan metode *fast-forward*.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian dasar yang mengkaji teori fisika yang bersifat kuantitatif dengan melakukan studi literatur yang berkaitan dengan teori kuantum adiabatik. Studi literatur yang dilakukan terkait dengan metode *fast-forward* sebagai penentu untuk mendapatkan fase adiabatik. Tahapan dari penelitian ini adalah Pengkajian teori dari persamaan Schrödinger yang sudah ada kemudian dikaji oleh metode *fast-forwad* yang mempercepat dinamika kuantum adiabatik pada osilator harmonik untuk mencari fase adiabatik atau yang dimisalkan dengan θ yang akan didapatkan pada keadaan energi dasar *(ground state)* dan keadaan eksitasi pertama *(first excited state)*. Hasil pengkajian teori diperoleh dari hasil yang dapat dipergunakan untuk mencari fase adiabatik θ tambahan dengan fase adiabatik θ merupakan sama. Hasil dari pengkajian teori mengenai fase adiabatik θ tambahan yang mempercepat dinamika kuantum adiabatik dibahas secara runtun dan sistematis. Hasil dari analisis dan pembahasan kemudian disimpulkan untuk menjawab rumusan masalah dalam penelitian ini.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam mekanika klasik, persamaan Schrödinger dapat mendeskripsikan perilaku gelombang sebagai partikel yang tidak bisa dijelaskan pada mekanika klasik[16]. Sistem yang berosilasi harmonik dapat diselesaikan dengan mentransformasikan persamaan Schrödinger tak bergantung waktu dalam satu dimensi ke dalam bentuk persamaan diferensial Hermite untuk batas asimtotik dengan memperhatikan syarat ternormalisasinya fungsi gelombang[10]. Dapat dinyatakan bahwa solusi persamaan Schrödinger dengan menggunakan Hamiltonian adalah solusi ruang momentum sedangkan solusi persamaan Schrödinger dengan menggunakan Hamiltonian disebut solusi ruang koordinat. Fungsi gelombang dalam ruang koordinat dituliskan dengan $\psi(\vec{x},t)$ dan fungsi gelombang dalam ruang momentum dinyatakan dengan $\psi(x,t)$. Partikel kuantum yang bergerak secara harmonik dapat juga digunakan melalui persamaan Schrödinger satu dimensi.

Masuda dan Nakamura telah mengembangkan proses adiabatik teknik penskalaan (*fast-forward*) untuk mempercepat dinamika keadaan, dengan contoh pengaplikasiannya yaitu untuk transportasi partikel atau waktu tergantung pada potensial harmonik, dan partikel bermuatan dalam medan elektro-magnet. Metode *fast-forward* juga diaplikasikan pada sistem yang bergerak, pada sistem orbital kuantum dengan mengaplikasiakan metode mendapatkan suku potensial tambahan.

Persamaan energi potensial pada Osilator Harmonik:

$$V = \frac{1}{2}kx^2, \tag{1}$$

dengan mengingat:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2}$$

dimana V merupakan energi potensial Osilator harmonik dan ω kecepatan sudut osilator harmonik, maka potensial dapat juga dituliskan:

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2x^2. \tag{3}$$

Dengan menggunakan Persamaan Schrödinger tak tergantung waktu, maka didapatkan yang dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi, \tag{4}$$

dimana $\hat{H}$ merupakan Hamiltonian yang bernilai:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V. \tag{5}$$

Substitusikan persamaan (3) dan (5) ke dalam persamaan (4):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\Psi = E\Psi \tag{6}$$

Dengan meninjau operator momentum:

$$p = -i\hbar\frac{d}{dx}, \tag{7}$$

sehingga didapatkan persamaan (6) menjadi:

$$\frac{1}{2m}[p^2 + (m\omega x)^2]\Psi = E\Psi. \tag{8}$$

Untuk mencari solusi fungsi gelombang persamaan Schrödinger tak bergantung waktu dari sistem osilator harmonik, digunakan operator tangga sebagai berikut[17]

$$a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(\mp ip + m\omega x), \tag{9}$$

didapatkan juga solusi pada keadaan dasar menggunakan operator tangga:

$$a_{-}\Psi_0 = 0, \tag{10}$$

$$a_{-}\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(ip + m\omega x)\Psi_0 = 0, \tag{11}$$

dengan

$$\left[i\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right) + m\omega x\right]\Psi_0 = 0. \tag{12}$$

Maka didapatkan fungsi gelombang keadaan dasar:

$$\Psi_0 = A_0 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \tag{13}$$

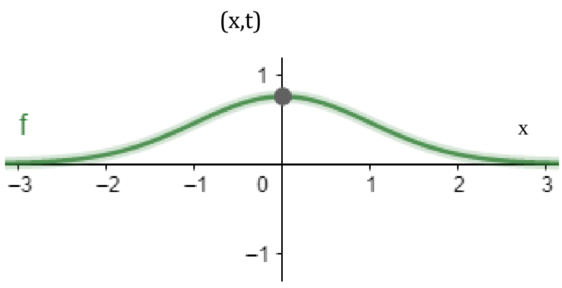
Selanjutnya konstanta A_0 didapatkan dengan normalisasi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = 1. \tag{14}$$

$$A_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{15}$$

kemudian substitusikan persamaan (15) ke dalam persamaan (13) maka fungsi gelombang pada keadaan dasar dapat dituliskan menjadi:

$$\Psi_0(x,t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \tag{16}$$



Gambar 1. Fungsi gelombang pada keadaan dasar

Grafik fungsi gelombang pada keadaan dasar $\Psi_0(x,t)$ untuk x mulai dari x= -3 sampai x=3 saat m=1, ω=1, п=1, dan ħ=1 dapat diamati melalui grafik pada Gambar 2. Fungsi gelombang pada keadaan dasar yang menyatakan bahwa distribusi probabilitas partikel berada dalam posisi tertentu.

Setelah mendapatkan persamaan fungsi gelombang pada keadaan dasar *(ground state)* pada persamaan (16) terlebih dahulu mencari solusi fungsi gelombang adiabatik, dimana persamaan tersebut nantinya yang akan digunakan untuk mendapatkan fase adiabatik θ pada keadaan dasar *(ground state)* dan keadaan eksitasi pertama *(first excited state)*.

Solusi fungsi gelombang pada persamaan Schrödinger dapat dituliskan:

$$\Psi(x,t) = A_n e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n dt}, \tag{17}$$

agar fungsi gelombang pada persamaan (17) dapat ditinjau menjadi fungsi gelombang adiabatik, maka parameter t dimodifikasi menjadi R(t), dengan;

$$R(t) = R_0 + \varepsilon t\,, \tag{18}$$

dan $\varepsilon \to 0$ (sangat kecil) kemudian ditambahkan θ yang merupakan fase adiabatik dan ε yaitu parameter adiabatik yang menyebabkan sistem bergerak lambat. Fungsi adiabatik sekarang dapat dituliskan menjadi[3]

$$\Psi(x,t) = A_n(x,R(t)) e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n(R(t))\,dt} e^{i\varepsilon\theta(x,t)}, \tag{19}$$

maka persamaan Schrödinger yang bersifat adiabatik dituliskan menjadi:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,R(t))}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2\Psi(x,R(t))}{\partial x^2} + V(x,R(t))\Psi(x,R(t)). \tag{20}$$

Persamaan (20) diturunkan terlebih dahulu sisi kirinya:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,R(t))}{\partial t} = i\hbar\left(\varepsilon\frac{\partial A_n(x,R(t))}{\partial R} e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n(R(t))\,dt} e^{i\varepsilon\theta(x,t)}\right), \tag{21}$$

dengan

$$\frac{\partial\Psi(x,R(t))}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t}\frac{\partial\Psi(x,R(t))}{\partial R} = \varepsilon\frac{\partial\Psi(x,R(t))}{\partial R}, \tag{22}$$

maka didapatkan persamaan :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,R(t))}{\partial t} = i\hbar\left[\frac{\partial A_n}{\partial R}\varepsilon - \frac{i}{\hbar}A_n(x,R(t))E_n + i\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t}A_n(x,R(t))\right] e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n(R(t))\,dt} e^{i\varepsilon\theta(x,t)}, \tag{23}$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,R(t))}{\partial t} = \left[i\hbar\varepsilon\frac{\partial A_n}{\partial R} + A_n(x,R(t))E_n - \hbar\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t}A_n(x,R(t))\right] e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n(R(t))\,dt} e^{i\varepsilon\theta(x,t)}. \tag{24}$$

Turunan sisi kanan persamaan (20) adalah :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2\Psi(x,R(t))}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\frac{\partial^2 A_n(x,R(t))}{\partial x^2} e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n(R(t))dt} e^{i\varepsilon\theta(x,t)}\right]. \tag{25}$$

Persamaan (25) diturunkan dua kali terhadap x, maka didapatkan turunan pertamanya yaitu:

$$\frac{\partial\Psi(x,R(t))}{\partial x} = \left[\frac{\partial A_n}{\partial x} + A_n(x,R(t))i\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t}\right]e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n(R(t))\,dt}\,e^{i\varepsilon\theta(x,t)}, \tag{26}$$

dengan menggunakan cara yang sama didapatkan turunan keduanya yaitu:

$$\frac{\partial^2\Psi(x,R(t))}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 A_n}{\partial x^2} + \frac{\partial A_n}{\partial x}i\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial A_n}{\partial x}i\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial x} + A_n(x,R(t))i\varepsilon\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + (i\varepsilon)^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 A_n(x,R(t))\right]e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n(R(t))\,dt}\,e^{i\varepsilon\theta(x,t)}. \tag{27}$$

Substitusikan hasil turunan pada persamaan (24) dan hasil turunan pada persamaan (27) ke dalam persamaan (20), maka didapatkan:

$$\left[i\hbar\varepsilon\frac{\partial A_n}{\partial R} + A_n(x,R(t))E_n - \hbar\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t}A_n(x,R(t))\right]e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n(R(t))\,dt}\,e^{i\varepsilon\theta(x,t)} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\frac{\partial^2 A_n}{\partial x^2} + \frac{\partial A_n}{\partial x}i\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial A_n}{\partial x}i\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial x} + A_n\big(x,R(t)\big)i\varepsilon\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + (i\varepsilon)^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 A_n\big(x,R(t)\big)\right]e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n(R(t))dt}\,e^{i\varepsilon\theta(x,t)} + V(x,R(t))A_n(x,R(t))e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n(R(t))\,dt}\,e^{i\varepsilon\theta(x,t)}, \tag{28}$$

dan

$$i\hbar\varepsilon\frac{\partial A_n}{\partial R} + A_n(x,R(t))E_n - \hbar\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t}A_n(x,R(t)) = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\frac{\partial^2 A_n}{\partial x^2} + \frac{\partial A_n}{\partial x}i\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial A_n}{\partial x}i\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial x} + A_n(x,R(t))i\varepsilon\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + (i\varepsilon)^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 A_n(x,R(t))\right] + V(x,R(t))A_n(x,R(t)). \tag{29}$$

Mengingat bahwa pada persamaan Schrödinger tak bergantung waktu,

$$\hat{H}A_n = E_nA_n, \tag{30}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2 A_n}{\partial x^2} + VA_n = E_nA_n, \tag{31}$$

maka persamaan (29) dan (31) digabungkan sehingga dapat ditulis kembali menjadi:

$$i\hbar\varepsilon\frac{\partial A_n}{\partial R} - \hbar\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t}A_n(x,R(t)) = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\frac{\partial A_n}{\partial x}i\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial A_n}{\partial x}i\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial x} + A_n(x,R(t))i\varepsilon\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + (i\varepsilon)^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 A_n(x,R(t))\right] \tag{32}$$

Karena ε^2 nilainya sangat kecil, maka persamaan yang mengandung ε^2 dapat dihilangkan dan persamaan (32) dituliskan kembali menjadi:

$$i\hbar\varepsilon\frac{\partial A_n}{\partial R} - \hbar\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t}A_n(x,R(t)) = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\frac{\partial A_n}{\partial x}i\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial A_n}{\partial x}i\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial x} + A_n(x,R(t))i\varepsilon\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right], \tag{33}$$

$$i\hbar\frac{\partial A_n}{\partial R} - \hbar\frac{\partial\theta}{\partial t}A_n(x,R(t)) = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\left[2\frac{\partial A_n}{\partial x}i\frac{\partial\theta}{\partial x} + A_n(x,R(t))i\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right], \tag{34}$$

lalu persamaan (34) dikalikan dengan $\frac{i}{\hbar}A_n{}^*$ agar dapat dibedakan antara fungsi real dan fungsi imajiner, didapatkan

$$-A_n{}^*\frac{\partial A_n}{\partial R} - i\frac{\partial\theta}{\partial t}|A_n|^2 = \frac{\hbar}{2m_0}\left[2A_n{}^*\frac{\partial A_n}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x} + |A_n|^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right], \tag{35}$$

kemudian persamaan (35) di kalikan dengan $\frac{2m_0}{\hbar^2}$ maka didapatkan persamaaan:

$$-\frac{2m_0}{\hbar}A_n{}^*\frac{\partial A_n}{\partial R}-i\frac{2m_0}{\hbar}\frac{\partial \theta}{\partial t}|A_n|^2=2A_n{}^*\frac{\partial A_n}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial x}+|A_n|^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}. \tag{36}$$

Pada persamaan (36) dipisahkan antara fungsi real dan imaginer, didapatkan:

$$\frac{2m_0}{\hbar}\,Re\left[A_n\frac{\partial A_n{}^*}{\partial R}\right]+2Re\left[A_n\frac{\partial A_n{}^*}{\partial x}\right]\frac{\partial \theta}{\partial x}+|A_n|^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=0, \tag{37}$$

dan

$$\frac{2m_0}{\hbar}Im\left[A_n{}^*\frac{\partial A_n}{\partial R}\right]+2Im\left[A_n{}^*\frac{\partial A_n}{\partial x}\right]\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{2m_0}{\hbar}\frac{\partial \theta}{\partial t}|A_n|^2=0. \tag{38}$$

Persamaan diatas merupakan persamaan untuk menentukan fase adiabatik θ. Karena fungsi gelombang yang ditinjau adalah fungsi real maka persamaan yang akan digunakan adalah persamaan (37).

Pada osilator harmonik solusi fungsi gelombang pada keadaan dasar didapatkan pada persamaan (16). Fungsi gelombang ini akan ditinjau menjadi fungsi gelombang adiabatik dengan mengubah parameter waktu t□R(t) dan dengan menambahkan fase adiabatik θ. Sehingga persamaan (16) dituliskan menjadi:

$$\Psi_0(x,R(t))=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}e^{i\varepsilon\theta(x,t)}. \tag{39}$$

Pada persamaan (39) dapat ditentukan nilai A_n:

$$A_n=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \tag{40}$$

Karena fungsi gelombang yang digunakan adalah fungsi real, maka $A_n{}^*=A_n$. Dari persamaan (37) parameter adiabatik R terlihat pada perubahan frekuensi (ω),

$$\omega=\omega_0+\varepsilon t, \tag{41}$$

$$\frac{2m_0}{\hbar}\left[A_n\frac{\partial A_n}{\partial \omega}\right]+2\left[A_n\frac{\partial A_n}{\partial x}\right]\frac{\partial \theta}{\partial x}+|A_n|^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=0 \tag{42}$$

Lalu substitusikan persamaan (40) ke dalam persamaan (42), didapatkan:

$$\frac{2m_0}{\hbar}\left[\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left\{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right\}\right]+$$
$$2\left[\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right\}\right]\frac{\partial\theta}{\partial x}+\left|\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right|^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=0, \tag{43}$$

sehingga didapatkan persamaan untuk menentukan fase adiabatik, sebagai berikut:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\hbar}{2m\omega x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\frac{mx}{2\hbar\omega}+\frac{1}{4\omega^2 x}. \tag{44}$$

Dengan mengasumsikan solusi θ adalah fungsi yang bergantung x^2 atau θ=Bx^2, maka didapatkan persamaan:

$$2Bx=\frac{\hbar}{2m\omega x}2B-\frac{mx}{2\hbar\omega}+\frac{1}{4\omega^2 x}, \tag{45}$$

$$\frac{B\hbar}{m\omega x} - \frac{mx}{2\hbar\omega} + \frac{1}{4\omega^2 x} - 2Bx = 0, \tag{46}$$

kemudian digabungkan suku yang sama sukunya didapatkan:

$$\frac{B\hbar}{m\omega x} + \frac{1}{4\omega^2 x} = 0 \tag{47}$$

dan

$$-\frac{mx}{2\hbar\omega} - 2Bx = 0, \tag{48}$$

didapatkan nilai B:

$$B = -\frac{m}{4\hbar\omega}, \tag{49}$$

dari persamaan (49) dengan memasukkan nilai θ=Bx^2 maka didapatkan nilai θ yaitu:

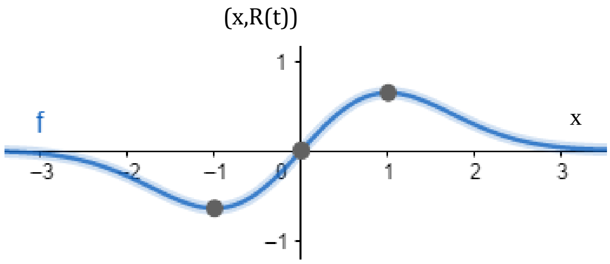
$$\theta = -\frac{m}{4\hbar\omega}x^2. \tag{50}$$

Sehingga didapatkan fungsi gelombang adiabatik pada keadaan dasar *(ground state)* dengan mensubstitusikan persamaan (50) ke dalam persamaan (39) adalah:

$$\Psi_0(x, R(t)) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} e^{-i\varepsilon\frac{m}{4\hbar\omega}x^2(x,t)}. \tag{51}$$

Selanjutnya untuk mencari fase adiabatik θ dan fungsi gelombang pada keadaan eksitasi pertama *(first excited state)* digunakan juga cara yang sama seperti pada keadaan dasar *(ground state)*. Didapatkan fungsi gelombang keadaan eksitasi pertama pada osilator harmonik yaitu[17]

$$\Psi_1(x, R(t)) = A_1\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} x\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \tag{52}$$



Gambar 2. fungsi gelombang pada keadaan eksitasi pertama

Grafik fungsi gelombang pada keadaan eksitasi pertama $\Psi_1(x, R(t))$ untuk x mulai dari x=-3 sampai x=3 saat m=1, ω=1, π=3,14 dan ħ=1 dapat diamati melalui grafik pada Gambar 3. fungsi gelombang pada keadaan eksitasi pertama yang menyatakan bahwa distribusi probabilitas partikel berada dalam posisi tertentu.

Dengan nilai $A_1 = 1$ maka fungsi gelombang pada keadaan eksitasi pertama pada fase adiabatik:

$$\Psi_1(x, R(t)) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} x\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} e^{i\varepsilon\theta(x,t)}, \tag{53}$$

maka dapat ditentukan nilai A_n untuk keadaan eksitasi pertama:

$$A_n = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} x\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \tag{54}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (54) ke dalam persamaan (42), didapatkan:

$$\frac{2m_0}{\hbar}\left[\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} x\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\, \frac{\partial}{\partial\omega}\left\{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} x\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right\}\right] +$$
$$2\left[\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} x\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\, \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} x\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right\}\right]\frac{\partial\theta}{\partial x} +$$
$$\left|\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} x\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right|^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0, \tag{55}$$

$$3x^2\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{2x^4\omega^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{\frac{7}{2}} + \frac{4x}{\pi^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{4x^3}{\pi^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{5}{2}}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{2x^2}{\pi^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0. \tag{56}$$

Persamaan (56) dikalikan dengan $\sqrt{\pi}$, didapatkan:

$$3x^2\omega^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{\frac{5}{2}} - 2x^4\omega^{\frac{3}{2}}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{\frac{7}{2}} + 4x\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\theta}{\partial x} - 4x^3\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{5}{2}}\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2x^2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0 \quad . \tag{57}$$

Dengan mengasumsikan kembali solusi θ adalah fungsi yang bergantung x^2 atau θ=Bx^2, maka didapatkan persamaan (57):

$$3x^2\omega^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{\frac{5}{2}} - 2x^4\omega^{\frac{3}{2}}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{\frac{7}{2}} + 4x\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}}2Bx - 4x^3\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{5}{2}}2Bx +$$
$$2x^2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}2B = 0, \tag{58}$$

$$3x^2\omega^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{\frac{5}{2}} - 2x^4\omega^{\frac{3}{2}}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{\frac{7}{2}} + 8Bx^2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} - 8Bx^4\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{5}{2}} + 4Bx^2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} = 0 \tag{59}$$

Kemudian digabungkan yang sama sukunya yaitu:

$$3x^2\omega^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{\frac{5}{2}} + 8Bx^2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} + 4Bx^2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} = 0, \tag{60}$$

dan

$$-2x^4\omega^{\frac{3}{2}}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{\frac{7}{2}} - 8Bx^4\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{5}{2}} = 0, \tag{61}$$

maka didapatkan nilai B:

$$B = -\frac{m}{4\hbar\omega}, \tag{62}$$

dari persamaan (62) dengan memasukkan nilai θ=Bx^2 maka didapatkan nilai θ yaitu:

$$\theta = -\frac{m}{4\hbar\omega}x^2. \tag{63}$$

Sehingga fungsi gelombang adiabatik pada keadaan eksitasi pertama *(first excited state)* dengan memasukkan persamaan (63) ke dalam persamaan (53) adalah:

$$\Psi_1(x, R(t)) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} x\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} e^{-i\varepsilon\frac{m}{4\hbar\omega}x^2(x,t)}. \qquad (64)$$

Pada keadaan dasar *(ground state)* dan keadaan eksitasi pertama *(first excited state)* kasus osilator harmonik, telah didapatkan fase adiabatick yang menyebabkan gerak osilator harmonik pada keadaan yang dapat di percepat.

KESIMPULAN

Pada penelitian ini telah didapatkan fungsi gelombang adiabatik dan fase adiabatik dengan menambahkan suku tambahan pada fungsi gelombang yaitu fase adiabatik θ yang menjamin osilator harmonik dapat bergerak dalam waktu yang singkat dan bergerak secara adiabatik tanpa mengubah sifat dan karakteristik partikel pada keadaan dasar (*ground state*) dan keadaan eksitasi pertama *(first excited state)* selama proses mempercepat berlangsung. Dari hasil penelitian ini didapatkan bahwa fase adiabatik untuk keadaan dasar (*ground state*) dan keadaan eksitasi pertama *(first excited state)* didapatkan nilai yang sama yaitu nilai $\theta = -\frac{m}{4\hbar\omega}x^2$ yang mengindikasikan bahwa fase adiabatik (θ) tidak bergantung pada level energi *(state independent)*.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Program Studi Pendidikan Fisika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) Universitas Bengkulu yang telah memberikan izin kepada penulis untuk mengikuti kegiatan MBKM (Merdeka Belajar Kampus Merdeka)

DAFTAR PUSTAKA

1. Benggadinda, A., & Setiawan, I. 2021. Metoda Fast Forward Untuk Mempercepat Dinamika Kuantum Adiabatik Pada Spin Tunggal. *JST (Jurnal Sains Dan Teknologi)*, *10*(2), 274–280. https://doi.org/10.23887/jstundiksha.v10i2.39876
2. Hartmann, A., Mukherjee, V., Niedenzu, W., & Lechner, W. 2020. Many-body quantum heat engines with shortcuts to adiabaticity. *Physical Review Research*, *2*(2), 1–13. https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.023145
3. Masuda, S., & Nakamura, K. 2010. Fast-forward of adiabatic dynamics in quantum mechanics. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *466*(2116), 1135–1154. https://doi.org/10.1098/rspa.2009.0446
4. Setiawan, I. 2019. Dinamika Spin Kuantum Adiabatik Dipercepat Pada Model Landau-Zener Dan Model Ising. *Jurnal Kumparan Fisika*, *2*(1), 57–64. https://doi.org/10.33369/jkf.2.1.57-64
5. Nakamura, K., Khujakulov, A., Avazbaev, S., & Masuda, S. 2017. Fast forward of adiabatic control of tunneling states. *Physical Review A*, *95*(6), 1–15. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.95.062108
6. Setiawan, I., Gunara, B. E., & Nakamura, K. 2019. Accelerated adiabatic dynamics in a triangular spin cluster. *Journal of Physics: Conference Series, 1204*(1), 1–12. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1204/1/012020
7. Aini, N. R. (2020). *Sejarah Perkembangan Fisika (Kuantum) dari Klasik Hingga Modern*. *4*(3), 57–71. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.17085.08160
8. Guéry-Odelin, D., Ruschhaupt, A., Kiely, A., Torrontegui, E., Martínez-Garaot, S., & Muga, J. G. 2019. Shortcuts to adiabaticity: Concepts, methods, and applications. *Reviews of Modern Physics*, *91*(4), 1–61. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.91.045001
9. Setiawan, I., Gunara, B. E., Avazbaev, S., & Nakamura, K. 2019. *Fast-forward approach to adiabatic quantum dynamics of regular spin clusters: nature of geometry-dependent driving interactions*. 1–17.

10. Setianingsih, Y., Akhsan, H., & Andriani, N., 2017. Relasi rekursi dan ortogonalitas polinom hermite pada fungsi gelombang osilator harmonik kuantum dalam studi kasus ketidakpastian Heisenberg. *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan IPA*, *1(1)*, 163–170.
11. Sholihah, F. M., S, S., & Variani, V. I., 2016. Analisis Energi Osilator Harmonik Menggunakan Metode Path Integral Hypergeometry dan Operator. *Indonesian Journal of Applied Physics*, *2*(02), 6–15. https://doi.org/10.13057/ijap.v2i02.1280
12. Chen, X., & Muga, J. G. 2010. Transient energy excitation in shortcuts to adiabaticity for the time-dependent harmonic oscillator. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, *82*(5), 1–7. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.053403
13. Masuda, S., & Nakamura, K., 2010b. Fast-forward of quantum adiabatic dynamics in electro-magnetic field. *Physics*, 1–25. http://arxiv.org/abs/1004.4108
14. Chung, H. C., Martínez-Garaot, S., Chen, X., Muga, J. G., & Tseng, S. Y., 2019. Shortcuts to adiabaticity in optical waveguides. *Epl*, *127*(3), 159–167. https://doi.org/10.1209/0295-5075/127/34001
15. Babajanova, G., Matrasulov, J., & Nakamura, K., 2018. Quantum gas in the fast forward scheme of adiabatically expanding cavities: Force and equation of state. *Physical Review E*, *97*(4), 1–13. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.97.042104
16. Wahdah, N., Arman, Y., & Lapanporo, B. P., 2016. Penentuan Energi Keadaan Dasar Osilator Kuantum Anharmonik Menggunakan Metode Kuantum Difusi Monte Carlo. *Positron*, *6*(2), 317–323. https://doi.org/10.26418/positron.v6i2.16837
17. Griffiths, D. (2005). *Introduction to Quantum Mechanics*. Reed College. Pearson Education International. United States of America