ISSN:2089 – 0133
April 2012

Indonesian Journal of Applied Physics (2012) Vol.2 No.1 halaman 6

Analisis Energi Osilator Harmonik Menggunakan Metode Path Integral Hypergeometry dan Operator

Fuzi Marati Sholihah[1], Suparmi[2], Viska Inda Variani[2]
[1]Program Studi Ilmu Fisika Program Pascasarjana Universitas Sebelas Maret Surakarta
[2]Jurusan Fisika FMIPA Universitas Sebelas Maret Surakarta
E-mail: fuzzimarati@yahoo.com

Received 22-12-2011, Revised 17-03-2012, Accepted 24-03-2012, Published 30-04-2012

ABSTRACT

Solution of the harmonic oscillator equation has a goal to get the energy levels of particles moving harmonic. The energy spectrums of one dimensional harmonic oscillator are analyzed by 3 methods: path integral, hypergeometry and operator. Analysis of the energy spectrum by path integral method is examined with Schrodinger equation. Analysis of the energy spectrum by operator method is examined by Hamiltonian in operator. Analysis of harmonic oscillator energy by 3 methods: path integral, hypergeometry and operator are getting same results $E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$

Key Words : *path integral, energy spectrum, hypergeometry, operator*

ABSTRAK

Penyelesaian persamaan osilator harmonik salah satu tujuannya adalah untuk mendapatkan tingkat energi partikel yang bergerak harmonik. Spektrum energi osilator harmonik satu dimensi dianalisis menggunakan tiga metode yaitu path integral, hypergeometry dan operator. Analisis spektrum energi menggunakan metode path integral ditelaah menggunakan propagator osilator harmonik. Analisis spektrum energi menggunakan metode hyergeometri ditelaah menggunakan persamaan Schrodinger. Analisis spektrum energi menggunakan metode operator ditelaah melalui hamiltonian didalam operator. Analisis energi osilator harmonik dengan menggunakan ketiga metode tersebut mendapatkan hasil yang sama yaitu $E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$

Kata kunci : *path integral*, spektrum energi, *hypergeometry*, operator

PENDAHULUAN

Fisika yang berkembang sampai akhir abad ke 19 dikenal sebagai fisika klasik dan mempunyai dua cabang utama yaitu mekanika klasik *Newtonian* dan teori medan elektromagnetik [1]. Mekanika klasik dicirikan oleh kehadiran partikel sebagai sesuatu yang terkurung di dalam ruang. Istilah terkurung secara sederhana dapat dikatakan adanya batas yang jelas antara materi dengan lingkungan di luar dirinya. Akhir abad ke 19 dan awal abad ke 20 terjadi krisis dalam fisika. Hasil eksperimen menunjukkan bahwa konsep-konsep fisika yang berdasarkan hukum-hukum *Newton* tidak bisa digunakan untuk menjelaskan hasil eksperimen sehingga diperlukan konsep baru yang tidak sama dengan fisika klasik[2].

Para ilmuwan fisika telah mengembangkan teori kuantum sejak awal abad ke 20. Fisika kuantum muncul dipelopori oleh *Bohr, Heisenberg, Schodinger* dan teori relativitas yang diungkapkan *Einstein* [3]. Pada tahun 1925-1926,*E.Schrodinger* menyatakan bahwa perilaku elektron, termasuk tingkat-tingkat energi elektron yang diskrit dalam atom mengikuti suatu persamaan diferensial untuk gelombang[1]. Persamaan diferensial tersebut kemudian dikenal dengan persamaan Schrodinger. Persamaan Schrodinger menjadi tulang punggung dalam memahami fenomena kuantum secara konsepsional dan matematis. Persamaan Schrodinger (PS) merupakan jantung dalam mekanika kuantum. Energi dan fungsi gelombang suatu partikel dapat ditentukan dengan menyelesaian persamaan Schrodinger. Energi dan fungsi gelombang digunakan untuk mendiskripsikan perilaku sekelompok partikel[2].

Penyelesaian persamaan menggunakan mekanika kuantum dengan metode analitik bertujuan untuk mendapatkan fungsi gelombang Schrodinger dan tingkat energi partikel yang berosilasi harmonik. Persamaan gelombang Schrodinger osilator harmonik dapat diselesaikan menggunakan persamaan diferensial biasa, deferensial (PD) orde II yang direduksi ke dalam PD orde dua fungsi Hermit, dan analitik[4].

Aplikasi fisika kuantum pada penelitian ini digunakan untuk menyelesaikan potensial osilator harmonik. Osilasi mempunyai karakteristik harmonik apabila memiliki amplitudo yang sangat kecil[5]. Secara mekanika kuantum energi partikel yang berosilasi harmonik tidak boleh sama dengan nol tetapi $E = E_0$. Untuk mengetahui perilaku partikel yang bergerak harmonik maka perlu dilakukan analisis energi osilator harmonik menggunakan metode *path integral*, hypergeometri dan operator. Metode *path integral*, hypergeometri dan operator mudah digunakan untuk menentukan tingkat energi osilator harmonik, karena persamaan matematis yang ada pada metode tersebut tidak rumit.

Penelitian terdahulu menyebutkan energi osilator harmonik ditentukan dari fungsi gelombang Schrodingernya. Cara yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan gelombang Schrodinger osilator harmonik adalah dengan menggunakan fungsi pembangkit dari fungsi hermit. Disebut sebagai fungsi pembangkit karena fungsi ini dapat membangkitkan fungsi hermit[4]. Berdasarkan penelitian sebelumnya fungsi pembangkit hanya digunakan untuk menentukan fungsi gelombang saja. Sedangkan penyelesaian tingkat energinya tetap ditentukan menggunakan metode analitik[6].

Ada metode lain yang digunakan untuk mendapatkan energi osilator harmonik tanpa menentukan persamaan Schrodinger terlebih dahulu. Metode itu adalah integral lintasan (*path integral*) yang diketemukan oleh *Feynman*. Metode integral lintasan mula-mula dikembangkan oleh *Feynman* lewat asas penjumlahan amplitude [7]. Pergerakan partikel berakibat pada penambahan lintasan propagator. Propagator atau yang sering disebut dengan *Kernal* adalah operator waktu yang dituliskan sebagai berikut [8].

$$K[q', t_1 : q, t_0] = \int_{-\sim}^{\sim} D|q| exp\left(\frac{i}{\hbar} S[q]\right) \qquad (1)$$

S adalah tindakan (aksi) dari partikel yang berpindah dari posisi dan waktu (q, t_0) sampai $(q^{'}, t_0)$ [6]. Lintasan yang dilewati partikel memberikan kontribusi amplitudo sama dengan propagatornya[8]. Aksi dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\, \mathcal{L} = S \tag{2}$$

Analisis osilator harmonik dimulai dari persamaan lagrangian sebagai berikut[8].

$$\mathcal{L}_{HO} = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \tag{3}$$

$$S = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt\dot{q}_c{}^2 - \omega^2\, q_c{}^2 + \delta(q)^2 - \omega^2(\delta q)^2 \tag{4}$$

Persamaan lagrangian (3) dimasukkan dalam persamaan (2) maka aksi S (4) dibagi menjadi dua bagian yaitu aksi klasikal dan aksi fluktuatif.

$$S_c = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt\dot{q}_c{}^2 - \omega^2 q_c{}^2 \tag{5}$$

$$S_f = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt(\delta\dot{q})^2 - \omega^2(\delta q)^2 \tag{6}$$

Persamaan (5) dan (6) digunakan untuk menghitung propagator osilator harmonik. berikut.

$$K = \lim_{N\to\infty} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j exp\left(\frac{iS_f}{\hbar}\right) exp\left(\frac{iS_c}{\hbar}\right) \tag{7}$$

Persamaan (5) dan (6) dimasukkan dalam persamaan (7) maka akan didapatkan propagator osilator harmoniknya.

Metode yang kedua adalah metode hypergeometry. Energi osilator harmonik yang ditentukan menggunakan metode hypergeometry dimulai dari penentuan persamaan Schrodinger potensial osilator harmonik satu dimensi[9].

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left(E\psi(x) - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi(x)\right) \tag{8}$$

Dengan memisalkan

$$y = \lambda x^2 \rightarrow K = \frac{k^2}{2\lambda} = \frac{\hbar k^2}{2m\omega} = \frac{E}{\hbar\omega} \tag{9}$$

Diketahui persamaan fungsi gelombang osilator harmonik satu dimensi

$$\psi(y) = e^{-y/2}\varphi(y) \tag{10}$$

Persamaan (10) diturunkan dua kali dan dimasukkan pada pers (8) maka akan membentuk persamaan Schrodinger hypergeometry

$$\left\{y\frac{d^2\varphi(y)}{dy^2}+\left(\frac{1}{2}-y\right)\frac{d\varphi(y)}{dy}+\left(\frac{K}{2}-\frac{1}{4}\right)\varphi(y)\right\}e^{-y/2}=0 \quad (11)$$

Persamaan (11) membentuk pola seperti persamaan di bawah ini.

$$x\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+(c-x)\frac{d\varphi(x)}{dx}-a\varphi(x)=0 \quad (12)$$

Persamaan (12) membentuk deret hypergeometri[10]. Dengsn menggunakan persamaan (11) maka diketahui

$$a=-\left(\frac{K}{2}-\frac{1}{4}\right) \quad (13)$$

Persamaan (9) dan (13) dapat digunakan untuk menentukan energi osilator harmonik.

Metode yang ketiga adalah metode operator. Metode operator dimulai dengan menentukan persamaan Hamiltonian di dalam operator[11]

$$\left(\frac{1}{\hbar\omega}[\hbar\omega(a)]^{+}a-\frac{1}{2}\right)=H \quad (14)$$

$$\hbar\omega\left(a^{+}a+\frac{1}{2}\right)=H \quad (15)$$

Energi osilator harmonik dapat ditentukan menggunakan persamaan di bawah ini.

$$H\psi_n=E_n\psi_n \quad (16)$$

METODE PENELITIAN

Penentuan energi menggunakan metode path integral ditulis dalam persamaan

$$K[q',t_1:q,t_0]=\int_{-\infty}^{\infty}D|q|\,exp\left(\frac{i}{\hbar}S|q|\right) \quad (17)$$

$$Z=\int dqK_E \quad (18)$$

$$E_n=-\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta}\ln Z \quad (19)$$

Penentuan energi menggunakan metode hypergeometry ditulis dalam persamaan (20).

$$\text{-a}=\text{n dan-a}=\text{n}+\frac{1}{2} \quad (20)$$

Penentuan energi menggunakan metode operator ditulis dalam persamaan (21) dan (22).

$$E_0\psi_0=H\psi_0 \quad (21)$$

$$E_1\psi_1=H\psi_1 \quad (22)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penjabaran energi osilator harmonik menggunakan metode *path integral* mendapatkan hasil yang sama dengan metode hypergeometry dan operator tetapi proses penjabarannya lebih rumit. Penjabarannya terdiri dari beberapa tahapan. Pertama dimulai dari penentuan propagator osilator harmonik. Propagator dijabarkan dari persamaan lagrangian osilator harmonik. Integral propagator terhadap waktu akan didapatkan penjabaran fungsi partisi. Limit fungsi pertisi terhadap beta akan membentuk persamaan tingkat energi osilator harmonik. Hasil penjabaran aksi klasikal dan fluktuatif dapat dituliskan sebagai berikut.

$$S_c = \frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left[(q' + q)cos\omega T - 2q'q\right] \tag{23}$$

$$F(T) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{24}$$

Persamaan (23) dan (24) di masukkan dalam persamaan propagator osilator harmonik satu dimensi akan didapatkan

$$K[q', t_1 : q, t_0] = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left\{\frac{im\omega 2q}{2\hbar\sin\omega T}[\cos\omega T - q]\right\} \tag{25}$$

Persamaan propagator (25) harus diubah dalam bentuk *euclidien* supaya dapat digunakan untuk menentukan fungsi partisinya. Perubahan waktu dt didekati dengan $id\tau$ yang digunakan untuk mengubah propagator dalam bentuk path *euclidien*.

$$-\frac{1}{\hbar}\int_0^{\beta\hbar} d\tau\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V|q(\tau)|\right] = -\frac{1}{\hbar}S_E \tag{26}$$

Persamaan propagator osilator harmonik (17) diubah dalam bentuk persamaan propagator energi osilator harmonik

$$K_E = \int Dq(\tau)exp\left(-\frac{1}{\hbar}S_E\right) \tag{27}$$

Persamaan propagator pada (27) diintegralkan terhadap posisi akan didapatkan fungsi partisi dari osilator harmonik, dengan penjabaran sebagai berikut

$$Z = \left(\sqrt{(2\cos\text{h}(\beta\hbar\omega) - 2)}\right)^{-1}$$

$$Z = \left(\sqrt{e^{-\beta\hbar\omega}(e^{2\beta\hbar\omega} - 1)}\right)^{-1}$$

$$Z = \left[e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}\left(e^{\frac{2\beta\hbar\omega}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{-1}$$

$$Z = \left(e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}} - e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}\right)^{-1}$$

$Z = \frac{1}{e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}} - e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}$ bila dikalikan dengan $e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}$ akan diperoleh hasil

$$Z = \sum e^{-\beta\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)} \quad (28)$$

Limit tak terhingga persamaan (28) terhadap fungsi β akan didapatkan tingkat energi dari osilator harmonik.

$$E_n = -\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \ln Z$$

$$E_n = -\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \ln e^{-\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})}$$

$$E_n = -\lim_{\beta\to\infty} \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) e^{-\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})}$$

$$E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (29)$$

Persamaan (29) menyatakan tingkat energi dari osilator harmonik yang diselesaikan menggunakan metode path integral.

Cara kedua yang digunakan untuk menentukan energi osilator harmonik adalah dengan menentukan persamaan Shcrodingernya. Sebagai pembanding dari metode *path integral*, maka akan ditentukan juga energi osilator harmonik menggunakan metode hypergeometry.

Persamaan (9) dimasukkan pada persamaan (20) maka akan diperoleh persamaan (30).Langkah pertama yang harus dilakukan dalam menjabaran energi osilator harmonik dengan metode hypergeometri yaitu dengan memisalkan $-a = n$

$$\frac{K}{2} - \frac{1}{4} = n$$

$$K = 2\left(n + \frac{1}{4}\right)$$

$$E = \left(2n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (30)$$

Langkah kedua yaitu dengan memisalkan $-a = n + \frac{1}{2}$ sehingga persamaan (20) dapat dijabarkan sebagai berikut.

$$\frac{K}{2} - \frac{1}{4} = n + \frac{1}{2}$$

$$\frac{K}{2} = n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$E = \left(2n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega \qquad (31)$$

Penggabungan persamaan (30) dan (31) digunakan untuk menentukan tingkat energi osilator harmonik.

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (32)$$

Persamaan (32) merupakan persamaan energi osilator harmonik yang ditentukan dengan menggunakan metode hypergeometri.

Metode yang ketiga adalah metode operator. Persamaan (21) dapat digunakan untuk menentukan energi tingkat dasar.

$$E_0\psi_0 = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)\psi_0$$

$$E_0\psi_0 = \frac{\hbar\omega\psi_0}{2}$$

$$\mathrm{E}_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \qquad (33)$$

Persamaan (19) dapat digunakan untuk menentukan energi tingkat pertama.

$$E_1\psi_0 = H\psi_1$$

$$E_1\psi_1 = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)a^+\psi_0$$

$$E_1\psi_1 = \hbar\omega a^+\left(\frac{H}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}\right)\psi_0 + \frac{1}{2}\hbar\omega a^+\psi_0$$

$$E_1\psi_1 = \frac{\hbar\omega a^+H\psi_0}{\hbar\omega} + \frac{\hbar\omega a^+\psi_0}{2} + \frac{1}{2}\hbar\omega a^+\psi_0$$

$$E_1\psi_1 = a^+E_0\psi_0 + \frac{1}{2}\hbar\omega a^+\psi_0 + \frac{1}{2}\hbar\omega a^+\psi_0$$

$$E_1\psi_1 = E_0a^+\psi_0 + \hbar\omega a^+\psi_0$$

$$E_1\psi_1 = (E_0 + \hbar\omega)a^+\psi_0$$

$$E_1\psi_1 = (E_0 + \hbar\omega)\psi_1$$

$$E_1 = (E_0 + \hbar\omega)$$

$$E_1 = \left(\frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega\right)$$

$$E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2} \tag{34}$$

Energi tingkat kedua dapat dijabarkan sebagai berikut

$$E_2\psi_2 = H\psi_2$$

$$E_2\psi_2 = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)a^+\psi_1$$

$$E_2\psi_2 = \hbar\omega a^+\left(\frac{H}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}\right)\psi_1 + \frac{1}{2}\hbar\omega a^+\psi_1$$

$$E_2\psi_2 = \hbar\omega a^+\left(E_1\psi_1 + \frac{1}{2}\psi_1\right) + \frac{1}{2}\hbar\omega a^+\psi_1$$

$$E_2\psi_2 = \frac{5\hbar\omega}{2}\psi_2$$

$$E_2 = \frac{5\hbar\omega}{2} \tag{35}$$

Apabila persamaan (33), (34) dan (35) dibuat dalam bentuk deret maka akan diperoleh tingkat energi osilator harmonik dengan metode operator.

$$E_n = E_0 + E_1 + E_2 + \cdots$$

$$E_n = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{5}{2}\hbar\omega + \cdots$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{36}$$

KESIMPULAN

Persamaan energi osilator harmonik dapat ditentukan dari persamaan propagator dan fungsi partisi.

Keduaenergi osilator harmonik dapat ditentukan dengan cara mereduksi persamaan Schrodinger ke dalam bentuk persamaan hypergeometry.

Ketiga energi osilator harmonik dapat ditentukan dari hamiltonian di dalam operator. Energi partikel yang berosilasi harmonik adalah $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$

DAFTAR PUSTAKA

1 Agus Purwanto, 2006, *Fisika Kuantum*,Gava Media, Yogyakarta
2 Suparmi, 2011, *Mekanika Kuantum I*, Jurusan Fisika Fakultas MIPA, Universitas Sebelas Maret Surakarta
3 Beiser, A., 1992, *Konsep Fisika Modern Edisi Keempat*, Erlangga, Jakarta
4 Bromley, D, A, !989, *Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin
5 Serway, R., A., and John, W, Jewett, 2004, *Physics For Scientists and Engineers Sixth Edition*, James Madison University
6 Bouch, Gabriel and L, Philip, Bowers, 2007, *Mathematical Physics electronic Journal ISSN 1086-6655*, Vol 13, Evaluating Feynman Path Integrals Via The Polinomial Path Family
7 Winters, R, R 1996, *Ann Journal of Physics*, Vol 65, Continued Fractions and The Harmonics Oscillator Using feynman's Path Integ*ral*, Department of Physics, Dennison University, Graville
8 Dennis, V, 2001, *Journal of Physics*, Vol 21, Path Integral in Quantum Mechanics, Department of Physics, Cambridge
9 Greiner, W, 1989, *Quantum Mechanics*, Physics Departement, Frankfurt University
10 Arfken, George, B and Hans, J, Weber, 2005, *Mathematical Methods For Physicists*, Elsevier Academic Pers, USA
11 Eckmann, B, and L, Van der, Waerden, 1971, *Practical Quantum Mechanics 1*, physikalisches Institut der Universitas Freiburg, Flugge, Berlin