ISSN:2089 – 0133
Oktober 2013

Solusi Persamaan Schrödinger untuk Potensial Hulthen + Non-Sentral Poschl-Teller dengan Menggunakan Metode Nikiforov-Uvarov

Nani Sunarmi, Suparmi, Cari

Jurusan Fisika, FMIPA Universitas Sebelas Maret Surakarta
nanisunarmi@gmail.com

Received 21-12-2012, Revised 29-04-2013, Accepted 06-05-2013, Published 13-10-2013

ABSTRACT

The Schrödinger equation for Hulthen potential plus Poschl-Teller Non-Central potential is solved analytically using Nikiforov-Uvarov method. The radial equation and angular equation are obtained through the variable separation. The solving of Schrödinger equation with Nikivorov-Uvarov method (NU) has been done by reducing the two order differensial equation to be the two order differential equation Hypergeometric type through substitution of appropriate variables. The energy levels obtained is a closed function while the wave functions (radial and angular part) are expressed in the form of Jacobi polynomials. The Poschl-Teller Non-Central potential causes the orbital quantum number increased and the energy of the Hulthen potential is increasing positively.

Keywords: Schrödinger equation, Hulthen potential, Poschl-Teller Non-Central potential, Nikiforov-Uvarov method

ABSTRAK

Persamaan Schrödinger potensial Hulthen+Non-Sentral Poschl-Teller diselesaikan secara analitik menggunakan metode Nikiforov-Uvarov. Persamaan bagian radial dan sudut diperoleh dengan pemisahan variabel. Penyelesaian persamaan Schrödinger dengan metode Nikivorov-Uvarov (NU) dilakukan dengan cara mereduksi persamaan differensial orde 2 menjadi persamaan diferensial orde 2 tipe Hipergeometri melalui subtitusi variabel yang sesuai. Tingkat energi yang diperoleh merupakan fungsi tertutup sedangkan fungsi gelombang (bagian radial dan sudut) dinyatakan dalam bentuk Polinomial Jacobi. Potensial Non-Sentral Poschl-Teller menyebabkan bilangan kuantum orbital bertambah dan energi pada potensial Hulthen semakin bernilai positif.

Kata Kunci: persamaan Schrödinger, potensial Hulthen, potensial Non-Sentral Poschl-Teller, metode Nikiforov-Uvarov

PENDAHULUAN

Penyelesaian dari persamaan Schrödinger dalam sistem fisika sangat penting karena penyelesaian persamaan Schrödinger dapat memberikan informasi energi dan fungsi gelombang suatu sistem pertikel[1]. Penyelesaian persamaan Schrödinger secara eksak hanya mungkin ketika bilangan kuantum orbital $l = 0$[2]. Sedangkan ketika $l \neq 0$, persamaan Schrödinger hanya bisa diselesaikan dengan pendekatan subtitusi yang sesuai[3]. Penyelesaian persamaan Schrödinger untuk sistem yang dipengaruhi potensial yang memiliki bentuk fungsi posisi (fungsi radial atau/dan fungsi sudut) diselesaikan dengan mereduksi persamaan Schrödinger menjadi persamaan differensial orde dua fungsi khusus seperti fungsi Hermit, Leguerre, Legendre, serta Hipergeometri yang meliputi Nikiforov-Uvarov dan Romanovski.

Suatu partikel dapat dipenggaruhi oleh satu jenis potensial atau dapat pula dipenggaruhi beberapa potensial secara bersamaan. Kombinasi potensial ini dapat berupa potensial Poschl-Teller dan *Rosen-Morse*[4,5], Hulthen dan *Manning Rosen*[6], *Pseudo Harmonic* dan *Ring Shaped*[7]. Beberapa teknik yang digunakan untuk menyelesaikan sistem partikel dengan potensial-potensial tersebut seperti metode faktorisasi[8,9], WKB[10], *shape invariance*[10], supersimetri mekanika kuantum[11] dan *path integral*.

Dalam paper ini akan diselesaikan potensial Hulthen+Non-Sentral Poschl-Teller yang dialami oleh elektron dalam suatu atom. Potensial Hulthen berperilaku seperti potensial Couloumb untuk nilai r relatif sangat kecil terhadap α yang dialami ketika elektron yang bergerak mengitari inti atom yang bermuatan positif. Selain melakukan gerakan mengitari intinya elektron juga mengalami vibrasi yang diakibatkan potensial Non-Sentral Poschl-Teller, sehingga potensial Non-Sentral Poschl-Teller mampu menjelaskan getaran spektrum dari suatu atom dan menjelaskan interaksi sistem atomik[3,4]. Metode yang sesuai untuk menyelesaikan sistem yang dipengaruhi oleh potensial Hulthen+ Non-Setral Poschl-Teller adalah metode Nikiforov-Uvarov [12-14] yang pengembangannya berbasis pada pereduksian persamaan Schrödinger menjadi persamaan diferensial orde 2 tipe Hipergeometri. Persamaan diferensial Hipergeometri memilki bentuk penyelesaian yang paling umum dan persamaan diferensial fungsi yang lain dapat direduksi menjadi persamaan diferensial hipergeometri. Bila persamaan Hipergeometri telah diperoleh, tingkat-tingkat energi suatu sistem dan juga fungsi gelombangnya dapat diperoleh dengan mudah.

Persamaan Schrödinger untuk potensial Hulthen +Non-Sentral Poschl-Teller

Potensial Non-Sentral Poschl-Teller[3] ditunjukan Persamaan (1) dan potensial Hulthen[6] ditunjukan Persamaan (2)

$$V(r,\theta)=\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\left\{\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sin^2\theta}+\frac{\eta(\eta-1)}{\cos^2\theta}\right\} \tag{1}$$

$$V(r)=-V_1\frac{e^{-2\alpha r}}{1-e^{-2\alpha r}} \tag{2}$$

Sehingga potensial Hulthen +Non-Sentral Poschl-Teller dapat dituliskan

$$v(r,\theta)=-V_1\frac{e^{-2\alpha r}}{1-e^{-2\alpha r}}+\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\left\{\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sin^2\theta}+\frac{\eta(\eta-1)}{\cos^2\theta}\right\} \tag{3}$$

Dengan V_1 dan α merupakan konstanta dan parameter jarak serta $0<r<\infty$, $\kappa>1,\eta>1$ dan $0\leq\theta\leq\pi$, sehingga persamaan Schrödinger tiga dimensi untuk suatu partikel yang memiliki massa μ dalam koordinat bola adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}\psi(r,\theta,\varphi)+$$
$$\left\{-V_1\frac{e^{-2\alpha r}}{1-e^{-2\alpha r}}+\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\left\{\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sin^2\theta}+\frac{\eta(\eta-1)}{\cos^2\theta}\right\}\right\}\psi(r,\theta,\varphi)=E\psi(r,\theta,\varphi) \tag{4}$$

Dengan pemisahan variabel maka fungsi gelombang pada Persamaan (4) dinyatakan sebagai

$$\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)P(\theta)\phi(\varphi) \tag{5}$$

Dengan $R = \frac{X(r)}{r}$ sehingga Persamaan (4) menjadi

$$X''(r) + \left[\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + V_1 \frac{e^{-2\alpha r}}{1-qe^{-2\alpha r}}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]X = 0 \tag{6a}$$

$$\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{m^2 P(\theta)}{sin^2\theta} - \left(\frac{\kappa(\kappa-1)}{sin^2\theta} + \frac{\eta(\eta-1)}{cos^2\theta}\right)P(\theta) + l(l+1)P(\theta) = 0 \tag{6b}$$

$$\frac{1}{\phi(\varphi)}\frac{\partial^2\phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} = -m^2 \tag{6c}$$

Dengan m dan l adalah bilangan kuantum magnetik dan bilangan kuantum orbital, sehingga diperoleh penyelesaian fungsi gelombang bagian *azimuthal*[15]

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi} \tag{7}$$

METODE

Metode Nikiforov-Uvarov

Persamaan deferensial Hipergeometri yang dapat diselesaikan dengan metode Nikiforov-Uvarov memiliki bentuk[1-3,6,[11][12];

$$\frac{\partial^2\psi(s)}{\partial s^2} + \frac{\bar{\tau}(s)}{\sigma(s)}\frac{\partial\psi(s)}{\partial s} + \frac{\bar{\sigma}(s)}{\sigma^2}\psi(s) = 0 \tag{8}$$

dimana $\sigma(s)$ dan $\bar{\sigma}(s)$ biasanya merupakan polinomial berderajat dua, dan $\bar{\tau}(s)$ merupakan polinomial berderajat satu. Persamaan (8) dapat diselesaikan dengan pemisahan variabel yaitu

$$\psi = \phi(s)y(s) \tag{9}$$

Dengan memasukkan Persamaan (9) ke Persamaan (8) kita mendapatkan persamaan tipe Hipergeometri:

$$\sigma\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \tau\frac{\partial y}{\partial s} + \lambda y = 0 \tag{10}$$

Dengan penyelesaian $\phi(s)$ bergantung pada:

$$\frac{\phi'}{\phi} = \frac{\pi}{\sigma} \tag{11}$$

fungsi $\pi(s)$ dan parameter λ dicari dengan menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$\pi = \left(\frac{\sigma' - \bar{\tau}}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \bar{\tau}}{2}\right)^2 - \bar{\sigma} + k\sigma} \tag{12}$$

$$\lambda = k + \pi' \tag{13}$$

Harga k pada Persamaan (13) dapat diperoleh dari kondisi bahwa pernyataan kuadrat dibawah akar pada Persamaan (12) merupakan kuadrat sempurna dari polinomial derajat satu, sehingga diskriminan dibawah akar harus sama dengan nol. Tingkat energi dapat diperoleh dari Persamaan (13) dan Persamaan (14a) dengan hubungan $\lambda = \lambda_n$

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' \quad , n = 0, 1, 2 \tag{14a}$$
$$\tau = \tilde{\tau} + 2\pi \tag{14b}$$

Fungsi gelombang diperoleh dengan ketentuan nilai $\tau' < 0$. Penyelesaian fungsi gelombang bagian kedua $y_n(s)$, yang bersesuaiaan dengan relasi Rodrigues diberikan oleh Persamaan (15) dimana C_n merupakan konstanta normalisasi, dan fungsi bobot $\rho(s)$ harus tergantung pada kondisi pada Persamaan (16).

$$y_n(z) = \frac{C_n}{\rho(z)}\frac{d^n}{dz^n}\left(\sigma^n(z)\rho(z)\right) \tag{15}$$
$$\frac{\partial(\sigma\rho)}{\partial s} = \tau(s)\rho(s) \tag{16}$$

Sehingga penyelesaian fungsi gelombang diperoleh dari Persamaan (10), (15) and (16).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Solusi Persamaan Schrödinger Bagian Sudut

Persamaan Scrodinger bagian sudut untuk potensial Hulthen+Non-Sentral Poschl-Teller dapat ditulis

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) - \frac{m^2 P(\theta)}{\sin^2\theta} - \left(\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sin^2\theta} + \frac{\eta(\eta-1)}{\cos^2\theta}\right)P(\theta) + l(l+1)P(\theta) = 0 \tag{17}$$

Untuk mengubah persamaan differensial orde 2 tersebut menjadi persamaaan differensial orde 2 tipe Hipergeometri maka dilakukan subtitusi variabel yang sesuai yaitu $\cos 2\theta = s$ pada Persamaan (17). Sehingga persamaan yang bersesuaian dengan Persamaan (8)

$$-4(1-s^2)\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} + 4\sqrt{(1-s^2)}\frac{(-s)}{\sqrt{(1-s^2)}}\frac{dP}{ds} - 2\frac{\sqrt{\frac{(1-s)}{2}}}{\sqrt{\frac{(1+s)}{2}}}\sqrt{(1-s^2)}\frac{dP}{ds} - 2\left[\frac{\kappa(\kappa-1)+m^2}{1-s} + \frac{\eta(\eta-1)}{1+s}\right]P + l(l+1)P = 0 \tag{18a}$$
$$\frac{d^2}{ds^2}P(\theta) - \frac{\left(\frac{1+3s}{2}\right)}{(1-s^2)}\frac{d}{ds}P(\theta) - \frac{1}{(1-s^2)^2}\left\{\frac{m^2(1+s)}{2} + \left\{\frac{2\kappa(\kappa-1)(1-s)}{4} + \frac{2\eta(\eta+1)(1+s)}{4}\right\} - \frac{l(l+1)(1-s^2)}{4}\right\}P(\theta) = 0 \tag{18b}$$

Dengan nilai

$$\sigma = (1-s^2) \tag{19a}$$

$$\tilde{\tau} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}s\right) \tag{19b}$$

$$\tilde{\sigma} = -\frac{\{(2(\kappa(\kappa-1)+m^2)+2\eta(\eta-1)-l(l+1)\}}{4} + \frac{[2(\kappa(\kappa-1)+m^2)-2\eta(\eta-1)]}{4}s + \frac{l(l+1)}{4}s^2\} \tag{19c}$$

Untuk menentukan nilai dari π digunakan Persamaan (12) dan (19) sehingga diperoleh bahwa

$$\pi = \left(\frac{1-s}{4}\right) \pm \sqrt{\left\{\frac{2(\kappa(\kappa-1)+m^2)+2\eta(\eta-1)-l(l+1)}{4} + k + \frac{1}{16}\right\} + \left[\frac{2(\kappa(\kappa-1)+m^2)-2\eta(\eta-1)}{4} - \frac{1}{8}\right]s + \left(\frac{l(l+1)}{4} - k + \frac{1}{16}\right)s^2} \tag{20}$$

Harga k pada Persamaan (20) dapat ditentukan nilainya dengan kondisi bahwa pernyataan kuadrat dibawah akar merupakan kuadrat sempurna dari polinomial derajat satu.

$$\pi = \left(\frac{1-s}{4}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{l(l+1)}{4} - k + \frac{1}{16}\right)}\left(s + \frac{\frac{2(\kappa(\kappa-1)+m^2)-2\eta(\eta-1)}{4} - \frac{1}{8}}{2\left(\frac{l(l+1)}{4} - k + \frac{1}{16}\right)}\right) \tag{21}$$

Dan diskriminan dibawah akar pada Persamaan (20) harus sama dengan nol.

$$\left[\frac{2(\kappa(\kappa-1)+m^2)-2\eta(\eta-1)}{4}-\frac{1}{8}\right]^2-4\left\{\frac{l(l+1)}{4}-k+\frac{1}{16}\right\}\left\{\frac{2(\kappa(\kappa-1)+m^2)+2\eta(\eta-1)}{4}+\frac{1}{8}-\frac{l(l+1)}{4}+k-\frac{1}{16}\right\}=0 \tag{22}$$

Untuk memudahkan dalam menentukan nilai *k* pada Persamaan (21) maka dilakukan permisalan bahwa

$$q=\frac{2\left(\kappa(\kappa-1)+m^2\right)}{4} \text{ dan } t=\frac{2\eta(\eta-1)}{4}+\frac{1}{8}=\frac{\left(\eta-\frac{1}{2}\right)^2}{2} \tag{23}$$

Sehingga diperoleh nilai *k*

$$k_1=\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{4}-\frac{\left(\sqrt{q}-\sqrt{t}\right)^2}{2} \tag{24a}$$

$$k_2=\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{4}-\frac{\left(\sqrt{q}+\sqrt{t}\right)^2}{2} \tag{24b}$$

Dari Persamaan (21) dan (24) dengan kondisi $\tau'<0$ diperoleh

$$\pi_1=-s\left(\frac{\sqrt{q}-\sqrt{t}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right)-\frac{\sqrt{q}+\sqrt{t}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4} \quad \text{untuk } k_1 \tag{25a}$$

$$\pi_2=-s\left(\frac{\sqrt{q}+\sqrt{t}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right)-\frac{\sqrt{q}-\sqrt{t}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4} \quad \text{untuk } k_2 \tag{25b}$$

Dengan menggunakan Persamaan (14b), (25a) dan (25b) diperoleh

$$\tau_1=-2s\left(\frac{\sqrt{q}-\sqrt{t}}{\sqrt{2}}+1\right)-2\frac{\sqrt{q}+\sqrt{t}}{\sqrt{2}} \quad \text{untuk } k_1 \tag{26a}$$

$$\tau_2=-2s\left(\frac{\sqrt{q}+\sqrt{t}}{\sqrt{2}}+1\right)-2\frac{\sqrt{q}-\sqrt{t}}{\sqrt{2}} \quad \text{untuk } k_2 \tag{26b}$$

Dengan menggunakan Persamaan (13), (24) dan (25) diperoleh nilai λ

$$\lambda_1=\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{4}-\frac{\left(\sqrt{q}-\sqrt{t}\right)^2}{2}-\left(\frac{\sqrt{q}-\sqrt{t}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right) \quad \text{untuk } k_1 \tag{27a}$$

$$\lambda_2=\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{4}-\frac{\left(\sqrt{q}+\sqrt{t}\right)^2}{2}-\left(\frac{\sqrt{q}+\sqrt{t}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right) \quad \text{untuk } k_2 \tag{27b}$$

Sedangkan menggunakan Persamaan (14) , (19) dan (26) diperoleh

$$\lambda_1=2n_l\left(\frac{\sqrt{q}-\sqrt{t}}{\sqrt{2}}\right)+n_l\left(n_l+1\right) \quad \text{untuk } k_1 \tag{28a}$$

$$\lambda_2=2n_l\left(\frac{\sqrt{q}+\sqrt{t}}{\sqrt{2}}\right)+n_l\left(n_l+1\right) \quad \text{untuk } k_2 \tag{28b}$$

Bilangan kuantum orbital diperoleh dari Persamaan (27) dan Persamaan (28)

$$l+\frac{1}{2}=\pm2\left\{\frac{\sqrt{\kappa(\kappa-1)+m^2}-\left(\eta-\frac{1}{2}\right)}{2}+n_l+\frac{1}{2}\right\} \quad \text{untuk } k_1 \tag{29a}$$

$$l+\frac{1}{2}=\pm2\left\{\frac{\sqrt{\kappa(\kappa-1)+m^2}+\left(\eta-\frac{1}{2}\right)}{2}+n_l+\frac{1}{2}\right\} \quad \text{untuk } k_2 \tag{29b}$$

Untuk mendapatkan fungsi gelombang dipilih nilai l dari k_2

$$l=\left(\sqrt{(\kappa(\kappa-1)+m^2)}+\eta\right)+2n_l \tag{30}$$

Bagian pertama fungsi gelombang diperoleh dari Persamaan (11), (19) dan (25b)

$$\phi(s) = (1-s)^{\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{2}}}(1+s)^{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}} \tag{31}$$

Fungsi bobot dapat diperoleh dari Persamaan (16), (19) dan (26b)

$$\rho(s) = (1-s)^{\frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{2}}}(1+s)^{\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{2}}} \tag{32}$$

Dengan Persamaan (15), (19) dan (32) dapat peroleh fungsi gelombang bagian kedua

$$\begin{aligned} y_{n_l}(s) &= \frac{C_{n_l}}{\rho(s)}\frac{d^{n_l}}{ds^{n_l}}\left(\sigma^{n_l}(s)\rho(s)\right) = \frac{C_{n_l}}{(1-s)^{\frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{2}}}(1+s)^{\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{2}}}}\frac{d^{n_l}}{ds^{n_l}}\left((1-s)^{\frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{2}}+n_l}(1+s)^{\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{2}}+n_l}\right) \\ &= \frac{C_{n_l}}{(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}}\frac{d^{n_l}}{ds^{n_l}}\left((1-s)^{\alpha+n_l}(1+s)^{\beta+n_l}\right) \\ &= B_{n_l}P_{n_l}^{(\alpha,\beta)}(s) \end{aligned} \tag{33}$$

dimana $P_{n_l}^{(\alpha,\beta)}$ adalah polinomial Jacobi, dan

$$B_{n_l} = C_{n_l}(-1)^{n_l}2^{n_l}n_l!,\ \ \alpha = \sqrt{2q},\ \ \beta = \sqrt{2t} \tag{34}$$

Dari Persamaan (9), (31) and (33) diperoleh fungsi gelombang secara lengkap

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \frac{C_{n_l}(1-s)^{\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{2}}}(1+s)^{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}}}{(1-s)^{\frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{2}}}(1+s)^{\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{2}}}}\frac{d^{n_l}}{ds^{n_l}}\left((1-s)^{\frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{2}}+n_l}(1+s)^{\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{2}}+n_l}\right) \\ &= B_{n_l}(1-s)^{\frac{\alpha}{2}}(1+s)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}P_{n_l}^{(\alpha,\beta)} \\ &= B_{n_l}(2\sin^2\theta)^{\frac{\sqrt{\kappa(\kappa-1)+m^2}}{2}}(2\cos^2\theta)^{\frac{\eta}{2}}P_{n_l}^{\left(\sqrt{\kappa(\kappa-1)+m^2},\left(\eta-\frac{1}{2}\right)\right)}(\cos 2\theta) \end{aligned} \tag{35}$$

dengan n_l merupakan bilangan kuantum sudut. Faktor normalisasi B_{n_l} diperoleh dari normalisasi keadaan fungsi gelombang sudut yang ditunjukan oleh Persamaan (35)

$$\int_0^{\pi} P_m(\theta)P_n(\theta)\sin\theta d\theta = \delta_{mn} \tag{36}$$

Dengan mensubtitusikan Persamaan (35) ke Persamaan (36) kita peroleh

$$-\int_{-1}^{1} B_m(1-s)^{\frac{\alpha}{2}}(1+s)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}P_m^{(\alpha,\beta)}(s)B_n(1-s)^{\frac{\alpha}{2}}(1+s)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}P_n^{(\alpha,\beta)}(s)\sin\theta\frac{d\theta}{ds}ds = \delta_{mn} \tag{37}$$

Dengan $\frac{ds}{\sin\theta\, d\theta} = -4\cos\theta = -4\sqrt{\frac{1+s}{2}} = -2\sqrt{2}\sqrt{1+s}$, Persamaan (37) dapat ditulis

$$\int_{-1}^{1} B_m(1-s)^{\frac{\alpha}{2}}(1+s)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}P_m^{(\alpha,\beta)}(s)B_n(1-s)^{\frac{\alpha}{2}}(1+s)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}P_n^{(\alpha,\beta)}(s)\frac{ds}{2\sqrt{2}\sqrt{1+s}} = \delta_{mn} \tag{38a}$$

$$\frac{B_m B_n}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}P_m^{(\alpha,\beta)}(s)P_n^{(\alpha,\beta)}(s)\,ds = \delta_{mn} \tag{38b}$$

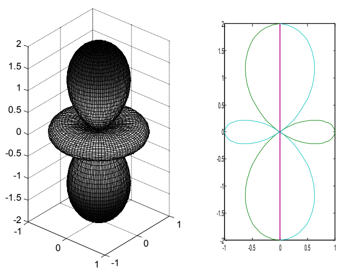
Faktor normalisasi dari Persamaan (38b) adalah

$$B_{n_l} = \sqrt{\frac{(2n_l+\alpha+\beta+1)n_l!\Gamma(n_l+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta-\frac{1}{2}}\Gamma(n_l+\alpha+1)\Gamma(n_l+\beta+1)}} \tag{39}$$

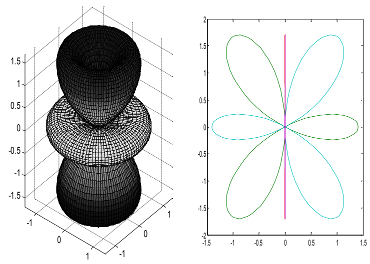
Fungsi gelombang sudut merupakan fungsi dari polinomial Jacobi seperti yang ditunjukan pada persamaaan (35). Dari beberapa penyelesaian khusus fungsi gelombang sudut dari potensial Hulthen+Non-Sentral Poschl-Teller dengan memberikan variasi masukan nilai konstanta κ, η, n_l, m, maka dihasilkan penyelesaian-penyelesaian fungsi gelombang sudut seperti yang ditampilkan pada Gambar 1.

Tabel 1. Fungsi gelombang sudut dari potensial Hulthen+Non-Sentral Poschl-Teller

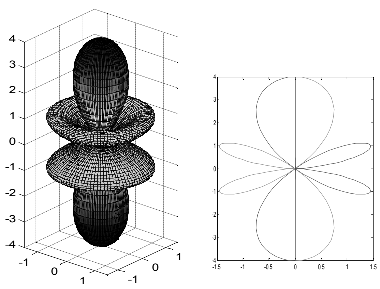
n_l	m	κ	η	l	$y_{n_l}(s)$	$P_m^l(\theta)$
1	0	0	0	2	$C_1(-(1+s)+\frac{1}{2}(1-s))$	$P_{1000}=P_0^2=-2\cos^2\theta+\sin^2\theta$
1	1	0	0	3	$C_1(-2(1+s)+\frac{1}{2}(1-s))$	$P_{1100}=P_0^2=\sin^1\theta\,(-5{,}65\cos^2\theta+1{,}41\sin^2\theta)$
1	0	0	2	4	$C_1\left(-(1+s)+\frac{1}{2}(1-s)\right)$	$P_{1002}=P_0^4=\cos^2\theta\,(-4\cos^2\theta+10\sin^2\theta)$
1	1	2	0	3,73	$C_1(-2{,}73(1+s)+\frac{1}{2}(1-s)$	$P_{1120}=P_0^{3,73}=\sin^1\theta\,(-9{,}937\sin^{0,73}\theta\cos^2\theta+10\sin^{2,73}\theta\cos^2\theta)$
1	1	2	2	5,73	$C_1(-19{,}92(1-s)+18{,}23\,($	$P_{1122}=P_1^{5,73}=\sin^1\theta(-19{,}92\sin^{0,73}\theta\cos^4\theta+18{,}23\sin^{2,73}\theta\cos^2\theta)$



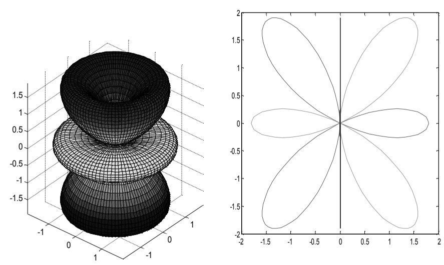
(a)



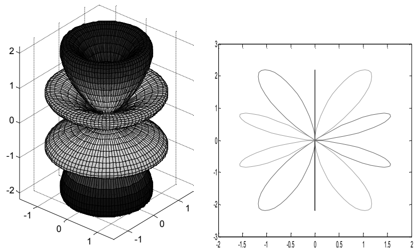
(b)



(c)



(d)



(e)

Gambar 1. Fungsi gelombang sudut (a) P_{1000} , (b) P_{1100}, (c) P_{1002}, (d) P_{1120}, (e) P_{1122} dan pengaruh $\csc^2\theta$ dari potensial Non-Sentral Poschl-Teller merubah fungsi gelombang pada sumbu z seperti yang ditunjukan (d) sama seperti pengaruh bilangan kuantum magnetik yang ditunjukan (b)

Solusi Persamaan Schrödinger Bagian Radial

Penyelesaian persamaan Schrödinger bagian radial pada Persamaan (6a) dilakukan dengan melakukan subtitusi variabel yang sesuai yaitu

$$\frac{1}{r^2} \cong \frac{4\,\alpha^2 e^{-2\alpha r}}{(1-e^{-2\alpha r})^2} \qquad\qquad e^{-2\alpha r} = s \tag{40}$$

Dengan Persamaan (40), Persamaan (6a) menjadi persamaan differensial orde 2 tipe Hipergeometri seperti yang ditunjukan oleh Persamaan (41)

$$\frac{d^2\chi}{ds^2} - \frac{(1-s)}{s(1-s)}\frac{d\chi}{ds} + \frac{1}{[s(1-s)]^2}\{(-\epsilon^2-\delta)s^2 + (2\epsilon^2+\delta-\gamma)s - \epsilon^2\}\chi(r) = 0 \tag{41}$$

$$-\epsilon^2 = \frac{2\mu E}{4\hbar^2\alpha^2} \qquad \delta = \frac{2\mu}{4\hbar^2\alpha^2}V_1 \qquad \gamma = l(l+1) \tag{42}$$

dengan $\sigma = s(1-s)$, $\quad \vec{\tau} = 1-s$

$$\vec{\sigma} = (-\epsilon^2-\delta)s^2 + (2\epsilon^2+\delta-\gamma)s - \epsilon^2 \tag{43}$$

untuk memperoleh nilai π maka Persamaan (43) disubtitusikan pada Persamaaan (12) sehingga diperoleh

$$\pi = -\frac{s}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{[1+4(\epsilon^2+\delta-k)]s^2 - 4\,(2\epsilon^2+\delta-\gamma-k)s + 4\epsilon^2} \tag{44}$$

Harga k pada Persamaan (44) diperoleh dari kondisi bahwa pernyataan kuadrat dibawah akar pada Persamaan (44) merupakan kuadrat sempurna dari polinomial derajat satu. Dan diskriminan dibawah akar pada Persamaan (44) harus sama dengan nol.

$$k_1 = \delta - \gamma + \in\sqrt{1+4\gamma} \tag{45a}$$

$$k_2 = \delta - \gamma - \in\sqrt{1+4\gamma} \tag{45b}$$

Sehingga diperoleh

$$\pi_1 = -\frac{s}{2} \pm \frac{1}{2}\left[\left(2\in - \sqrt{1+4\gamma}\right)s - 2\in\right] \text{ untuk } k_1 \tag{46a}$$

$$\pi_2 = -\frac{s}{2} \pm \frac{1}{2}\left[\left(2\in + \sqrt{1+4\gamma}\right)s - 2\in\right] \text{ untuk } k_2 \tag{46b}$$

Untuk mendapatkan tingkat energi dan fungsi gelombang yang terkait diperlukan kondisi $\tau' < 0$ sehingga dipilih

$$\pi = -\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\left[\left(2 \in +\sqrt{1+4\gamma}\right)s - 2 \in \right] \text{ untuk } k_2 \tag{47}$$

Dengan nilai

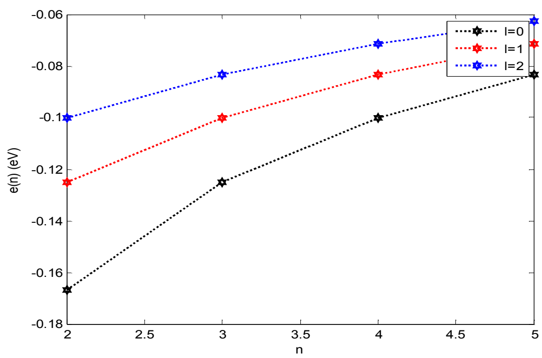
$$\tau = 1 - 2s - \left[\left(2 \in +\sqrt{1+4\gamma}\right)s - 2 \in \right] \tag{48}$$

Dengan mensubtitusikan turunan pertama dari Persamaan (48) yaitu τ' pada Persamaan (14a) diperoleh

$$\lambda = \delta - \gamma - \frac{1}{2}(1 + 2 \in)\left(1 + \sqrt{1+4\gamma}\right) = n_r\left[1 + 2\epsilon + n_r + \sqrt{1+4\gamma}\right] \tag{49}$$

Dengan nilai n_r=1,2,3… Nilai energi ditentukan berdasarkan Persamaan (42) dan Persamaan (49) sehingga diperoleh E_{n_r}

$$E_{n_r} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{\mu V_1}{\hbar^2(n_r+l+1)\,2\alpha} - \frac{(n_r+l+1)\,2\alpha}{2}\right]^2 \tag{50}$$



Gambar 2. Grafik Tingkat energi potensial Hulthen terganggu potensial Non-Sentral Poschl-Teller dengan V_1=0,5$\frac{\hbar^2}{2\mu}$ $\alpha = 0{,}2$

Energi tersebut menunjukan partikel yang mengalami potensial Hulthen yang terganggu oleh potensial Non-Sentral Poschl-Teller yang ditunjukan Persamaan (50) dengan nilai parameter *l* sebagai bilangan kuantum orbital dinyatakan pada Persaman (30). Berdasarkan Gambar 2 dapat diketahui bahwa semakin besar gangguan yang dilakukan potensial Non – Sentral Poschl-Teller terhadap potensial Hulthen yang ditunjukkan oleh nilai l≠0 maka energi semakin bernilai positif. Ini artinya elektron membutuhkan energi ikat yang semakin besar untuk berada pada kulit tersebut dengan kata lain elektron semakin mudah terlepas dari ikatannya hanya dengan energi luar yang kecil.

Penyelesaian fungsi gelombang diperoleh dengan mensubtitusikan π dan σ pada Persamaan (10) dan dihasilkan persamaan diferensial orde satu dengan penyelesaian

$$\phi = (1-s)^{l+1}\,(s)^{\in} \tag{51}$$

Dan dengan mengunakan Persamaan (16) diperoleh fungsi bobot

$$\rho = (1-s)^{2l+1}s^{2\in} \tag{52}$$

Sehingga diperoleh persamaan fungsi gelombang bagian kedua dari fungsi gelombang radial

$$y_{n_r}(s) = \frac{C_{n_r}}{(1-s)^{2l+1}s^{2\epsilon}} \frac{d^{n_r}}{ds^{n_r}} \left((1-s)^{2l+1+n_r}\, s^{2\epsilon+n_r}\right) \tag{53}$$

Dengan memisalkan bahwa *x=1-2s* maka Persamaan (53) menjadi

$$y_{n_r}(s) = y_{n_r}\left(\frac{1-x}{2}\right) = \frac{C_{n_r}(-1)^{n_r}}{2^{n_r}(1+x)^{2l+1}(1-x)^{2\epsilon}} \frac{d^{n_r}}{ds^{n_r}} \left((1+x)^{2l+1+n_r}\,(1-x)^{2\epsilon+n_r}\right) \tag{54}$$

Dengan polinomial Jacobi dinyatakan dengan persamaan

$$P_{n_r}^{(a,b)}(s) = \frac{C_{n_r}(-1)^{n_r}}{n_r!\,2^{n_r}(1-s)^{a}(1+s)^{b}} \frac{d^{n_r}}{ds^{n_r}} \left((1-s)^{a+n_r}\,(1+s)^{b+n_r}\right) \tag{55}$$

Sehingga diperoleh fungsi gelombang *X*(s) menjadi

$$X(s) = B_{n_r}(1-s)^{l+1}s^{\epsilon}\; P_{n_r}^{(2\epsilon,2l+1)}(1-2s)$$

$$X(r) = B_{n_r}(1-e^{-2\alpha r})^{l+1}\left(e^{-2\alpha r}\right)^{\frac{V_1\varepsilon}{4\hbar^2\alpha^2(n_r+l+1)}-\frac{(l+1+n_r)}{2}}\; P_{n_r}^{\left(2\left(\frac{V_1\varepsilon}{4\hbar^2\alpha^2(n_r+l+1)}-\frac{(l+1+n_r)}{2}\right),2l+1\right)}(1-2e^{-2\alpha r}) \tag{56}$$

Untuk menentukan konstanta B_{n_r} maka digunakan persamaan dibawah ini

$$\int_0^{\infty}|R(r)|^2 r^2\, dr = \int_0^{\infty}|X(r)|^2\, dr = \int_0^1 |X(s)|^2\, \frac{dr}{\alpha s} = 1 \tag{57}$$

dimana $s = e^{-2\alpha r}$. Dengan memasukkan Persamaan (56) pada Persamaan (57) dan menggunakan definisi dari polinomial Jacobi [15]

$$P_{n_r}^{(a,b)}(s) = \frac{\Gamma(n_r+a+1)}{n_r!\,\Gamma(1+a)}\quad {}_2F_1\left(-n_r, a+b+1; 1+a; \frac{1-s}{2}\right) \tag{58}$$

Sehingga persamaan (57) menjadi

$$\int_0^1 B_{n_r}^2(1-s)^{2(l+1)}s^{2\epsilon-1}\left\{\; {}_2F_1\left(-n_r, 2\epsilon+2l+2+n_r; 1+2\epsilon; s\right)\right)\}^2\, dr = 1 \tag{59}$$

Dengan B_{n_r} merupakan konstanta normalisasi dan ${}_2F_1$ merupakan fungsi hipergeometri dengan menggunakan rumus integral[16]

$$\int_0^1 (1-z)^{2(\delta+1)}z^{2\lambda-1}\left\{\; {}_2F_1\left(-n_r, 2(\delta+\lambda+1)+n_r; 1+2\lambda; z\right)\right)\}^2\, dz = \frac{(n_r+\delta+1)\,n_r!\,\Gamma(2n_r+2\delta+2)\Gamma(2\lambda)\Gamma(2\lambda+1)}{(n_r+\lambda+\delta+1)\Gamma(n_r+2\lambda+1)\Gamma(2(\delta+\lambda+1)+n_r)} \tag{60}$$

dengan $\delta > -\frac{3}{2} \wedge \lambda > 0$. Sehingga diperoleh persamaan konstanta normalisasi adalah

$$B_{n_r} = \sqrt{\frac{2\alpha\varepsilon\, n_r!\,(n_r+\varepsilon+l+1)\Gamma(2+2l+2\varepsilon+n_r)}{(n_r+l+1)\Gamma(n_r+2\varepsilon+1)\Gamma(2l+2+n_r)}} \tag{61}$$

dengan n_r merupakan bilangan kuantum radial. Berdasarkan penyelesaian yang telah didapat pada Persamaan (6), (35) dan (56) maka penyelesaian fungsi gelombang untuk kombinasi potensial Hulthen dan Non-Sentral Poschl-Teller sebagai

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \psi(r,\theta,\phi) = B_{n_r}B_{n_l}(1-e^{-2\alpha r})^{l+1}s^{\epsilon}\; P_{n_r}^{(2\epsilon,2l+1)}(1-2e^{-2\alpha r})$$

$$(2\sin^2\theta)^{\frac{\sqrt{\kappa(\kappa-1)+m^2}}{2}}(2\cos^2\theta)^{\frac{\eta}{2}}P_{n_l}^{\left(\sqrt{\kappa(\kappa-1)+m^2},\left(\eta-\frac{1}{2}\right)\right)}(\cos 2\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi} \qquad (62)$$

Dengan nilai $\in=\frac{V_1\mu}{4\hbar^2\alpha^2(n_r+l+1)}-\frac{(l+1+n_r)}{2}$, l ditunjukan oleh Persamaan (30). Misal untuk $n_r=1, n_l=1, m=0,\ \kappa=0,\ \eta=0$ dengan $\alpha=0{,}2, V_1=0{,}5\frac{\hbar^2}{2\mu}$ maka $\frac{V_1\mu}{4\hbar^2\alpha^2}=6{,}25$ maka fungsi gelombang yang dimilikinya

$$\psi(r,\theta,\phi)=B_1B_1(1-e^{-2\alpha r})^{3}s^{-0{,}4375}\ P_{n_r}^{(-0{,}875;5)}(1-2e^{-2\alpha r})$$
$$(2\sin^2\theta)^0\ (2\cos^2\theta)^0P_{n_l}^{\left(0;\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}(\cos 2\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^0$$
$$\psi(r,\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}B_1B_1(1-e^{-2\alpha r})^3(0{,}125(1-e^{-2\alpha r})\left(e^{-2\alpha r}\right)^{-0{,}4375}-6)($$
$$-2\ \cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

Sedangkan ketika memperoleh gangguan dari potensial Non-Sentral Poschl-Teller ($\kappa=2,\ \eta=2$) maka fungsi gelombangnya menjadi

$$\psi(r,\theta,\phi)=B_1B_1(1-e^{-2\alpha r})^{\sqrt{2}+4}s^{-2{,}86}\ P_{n_r}^{(-5{,}72;\ 2\sqrt{2}+8)}(1-2e^{-2\alpha r})$$
$$(2\sin^2\theta)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\ (2\cos^2\theta)^1P_{n_l}^{\left(\sqrt{2};\left(\frac{1}{2}\right)\right)}(\cos 2\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^0$$

$$\psi(r,\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}B_1B_1(\left[-12{,}82\ \left(1-e^{-2\alpha r}\right)^{6{,}41}\left(e^{-2\alpha r}\right)^{-1{,}86}\right]-\left[-4{,}72\ (1-\right.$$
$$\left.e^{-2\alpha r})^{7{,}41}\left(e^{-2\alpha r}\right)^{-2{,}86}\right])(-15{,}71\ \cos^{*}\theta\sin^{1{,}41}\theta+16{,}3\ \cos^{*}\theta\sin^{1{,}41}\theta$$

KESIMPULAN

Persamaan Scrodingger untuk potensial Huthen+Non-Sentral Poschl-Teller telah diselesaikan dengan menggunakan metode Nikivorov-Uvarov. Energi yang diperoleh dari Potensial Hulthen+ Non Sentral Poschl-Teller merupakan fungsi tertutup yang bergantung pada nilai n_r, l dengan nilai l bergantung pada nilai $\kappa,\ \eta$ yang merupakan gangguan dari potensial Non-Sentral Posch-Teller . Fungsi gelombang radial dan angular dinyatakan dalam polinomial Jacobi. Potensial Non-Sentral Poschl-Teller menyebabkan bilangan kuantum orbital bertambah dan energi potensial Hulthen yang ditunjukan dengan nilai E_{n_r} yang semakin positif sehingga elektron semakin mudah lepas dengan energi dari luar yang sedikit.

DAFTAR PUSTAKA

1 Ikot, A. N. 2011. Analytical Solutions of Schrödinger Equation with Generalized Hyperbolic Potential Using Nikiforov-Uvarov Method. *The African Review of Physics*, Vol. 6, pp. 221-227.

2 Ikot, A.N., Antia, A. D., Akpabio, L. E. and Obu, J. A. 2011. Analytical Solutions of Schrödinger Equation with Two- Dimensional Harmonic Potential in Cartesian and Polar Coordinates Via Nikiforov-Uvarov Method. *Journal of Vectorial Relativity,* Vol. 6 No. 2, pp. 65-76.

3 Cari and Suparmi. 2012. Approximate Solution of Schrodinger Equation for Trigonometric Scarf Potential with the Poschl-Teller Non-central potential Using NU Method*.* *IOSR Journal of Applied Physics (IOSR-JAP)* ISSN: 2278-4861, Vol. 2 Issue 3, pp. 13-23.

4 Kleinert, H. and Mustapic, I. 1992. Summing the Spectral Representation of Poschl-teller and Rosen Morse Fixed –Energy Amplitudes. *J. Math. Phys*, Vol. 33 No. 2, pp. 643- 662.
5 Ikot, A. N. and Akpabio, L. E. 2010. Approximate Solution of the Schrödinger Equation with Rosen-Morse Potential Including the Centrifugal Term. *Applied Physics Research,* Vol. 2 No. 2, pp. 202-208.
6 Meyur, S. and Debnath, S. 2009. Solution of the Schrödinger equation with Hulthén plus Manning-Rosen potential . *Lat. Am. J. Phys. Educ.,* Vol. 3 No. 2, pp. 300-306.
7 Shojaei, M. R. and Rajabi, A. A. 2011. Determination of energy levels of the Klein–Gordon equation, with pseudo harmonic potential plus the ring shaped potential. *International Journal of the Physical Sciences,* Vol. 6 No. 33, pp. 7441 – 7446.
8 Awoga, O. A., Ikot, A. N., Akpan, I. O. and Antia, A. D. 2012. Solution of the Schrödinger equation with axponential Coshine-screened potential. *Indian Journal of Pure & Applied Physics*, Vol. 50, pp. 217-223.
9 Sadeghi, J. and Pourhassan, B. 2008. Exact Solution of The Non Central Modified Kratzer Potential Plus a Ring-Shaped Like Potential By The Factorization Method. *Electronic Journal of Theoretical Physics,* Vol. 5 No. 17, pp. 193-202.
10 Suparmi, A., Cari, C., Handika, J., Yanuarief, C. and Marini, H. 2012. Approximate Solution of Schrodinger Equation for Modified Poschl-Teller plus Trigonometric Rosen-Morse Non-Central Potentials in Terms of Finite Romanovski Polynomials. *IOSR Journal of Applied Physics (IOSR-JAP)* ISSN: 2278-4861,Vol. 2 Issue 2 , pp. 43-51.
11 Gonul , B. and Zorba, I. 2000 . Supersymmetric Solutions of Non Central Potentials. *Physics Letters A 269* . pp. 83-88.
12 Antia, A. D. 2010. Exact Solutions of the Schrodinger Equation with Manning-Rosen Potential Plus a Ring-Shaped Like Potential by Nikiforv-Uvarov Method. *European Journal of Scientific Research* ISSN 1450-216X, Vol.46 No.1, pp.107-118.
13 Meyur, S. and Debnath, S. 2010 .Eigen Spektra for Woods-Saxon Plus Rosen Morse Potential. *J. Phys. Edu* Vol.4 No. 3, pp. 587-597.
14 Bakkeshizadeh, S. and Vahidi, V. 2012. Exact Solution of the Dirac Equation for The Coloumb Potential Plus NAD Potential by Using the Nikiforov-Uvarov Method. *Adv. Studies Theor. Phys.*, Vol. 6 No. 15, pp.733-742.
15 Agboola, D. 2011. Schrödinger Equation with Hulthen Potential Plus Ring-Shaped Potential. *Communication in Theoritical Physics,*Vol. 55 No. 6, pp. 972-976.