

PENGGUNAAN KRITERIA *KARUSH – KUHN – TUCKER* (KKT) DALAM ANALISIS *ECONOMIC ORDER QUANTITY* (EOQ) MODEL INVENTORI DALAM PERMASALAHAN RANTAI PASOK

¹⁾Rubono Setiawan, ²⁾Getut Pramesti

¹⁾²⁾Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Sebelas Maret
Gedung D Lantai 1, Jalan Ir. Sutami No. 36 A Ketingan, Jebres, Surakarta
Corresponding author e-mail : ¹⁾rubono.matematika@staff.uns.ac.id

ABSTRAK.

Model inventori merupakan model matematika untuk menentukan formula total biaya yang dibutuhkan dalam sistem rantai pasok produk produksi. Tujuan dari analisa model inventori adalah untuk menentukan total biaya minimum yang dapat memaksimalkan keuntungan. Analisa keoptimalan model inventori umumnya menggunakan kriteria turunan parsial pertama dalam kalkulus. Kriteria turunan parsial pertama dalam kalkulus merupakan metode optimasi tanpa kendala. Dalam beberapa kasus inventori terdapat asumsi berupa kendala yang harus dipenuhi, sebagai contoh kendala tingkat layanan (*service level constraint*) oleh pihak buyer dalam model dua echelon. Kendala tersebut apabila diformulasikan secara matematika akan membentuk permasalahan optimasi berkendala. Permasalahan optimasi berkendala tidak bisa langsung diselesaikan dengan kriteria optimasi biasa dengan menggunakan turunan parsial pertama. Salah satu metode atau kriteria yang bisa digunakan adalah kriteria Karush – Kuhn – Tucker (KKT).

Kata Kunci: KKT, EOQ, Inventori, Service Level

PENDAHULUAN

Model inventori adalah suatu model matematika yang menggambarkan kondisi dari suatu sistem rantai pasok. Dalam perkembangannya, model inventori lebih diarahkan untuk menganalisa suatu sistem rantai pasok dengan dua atau lebih pihak yang terlibat didalamnya. Model inventori dapat digolongkan sebagai suatu model matematika yang membutuhkan proses optimasi untuk menganalisanya. Tujuan dari analisa model inventori adalah menentukan nilai optimum dari dari tiap – tiap variabel keputusan dari fungsi tujuan yang dalam hal ini adalah fungsi total biaya yang dibutuhkan oleh sistem. Nilai – nilai optimum tersebut disebut sebagai Economic Order Quantity (EOQ). Nilai EOQ tersebut merupakan nilai yang apabila dimasukkan ke dalam fungsi total

biaya akan membuat nilai total biaya menjadi optimum (yang dalam banyak kasus adalah nilai minimum). Dalam analisa optimasi suatu model inventori, teknik yang umum digunakan untuk analisa adalah teknik optimasi kalkulus yang menerapkan turunan parsial pertama. Teknik ini memanfaatkan konsep nilai maksimum atau minimum dari suatu fungsi. Hal ini sejalan dengan tujuan utama dari permasalahan optimasi yaitu adalah menentukan nilai – nilai tertentu yang membuat nilai fungsi tujuan menjadi minimum atau maksimum tergantung dari konteks permasalahan yang dibahas. Teknik optimasi kalkulus diterapkan terhadap suatu fungsi tujuan dengan menentukan turunan parsial pertama untuk menentukan nilai optimum dari variabel keputusan. Penggunaan konsep turunan parsial pertama dalam penentuan nilai

optimum banyak digunakan pada hampir semua penelitian dalam model inventori ([1] – [20]). Lebih khusus, dalam beberapa model inventori yang di dalam asumsinya melibatkan kendala – kendala yang harus dipenuhi (constraint), maka dibutuhkan metode optimasi yang dapat menganalisa hal tersebut. Salah satunya adalah penggunaan kriteria Karush – Kuhn – Tucker (KKT). Berdasarkan fakta bahwa masih cukup kurangnya referensi yang membahas secara detail terkait penggunaan kriteria KKT dalam analisa penentuan EOQ dari model inventori, maka dalam artikel ini akan dijelaskan terkait kriteria KKT dan penjelasan penggunaannya dalam model inventori. Hasil penjelasan ini diharapkan dapat digunakan sebagai tambahan referensi dalam bidang manajemen rantai pasok. Paper ini disusun dengan urutan sebagai berikut: Pendahuluan, Metodologi, Pembahasan, yang berisi deskripsi masalah, kriteria KKT dan Penggunaan kriteria KKT dalam analisa keoptimalan model inventori, dan diakhiri dengan kesimpulan dan saran.

METODOLOGI

Hasil dalam tulisan ini merupakan hasil kajian secara matematika berdasarkan referensi dan hasil – hasil penelitian terkait yang telah dilakukan oleh tim peneliti sebelumnya. Metode kajian pustaka digunakan untuk menjelaskan perkembangan literatur terkait penggunaan konsep optimasi dalam penentuan *Economic Order Quantity* (EOQ) dari suatu sistem *supply chain*. Kemudian hasil kajian literatur tersebut dikombinasikan dengan hasil – hasil penelitian pengembangan yang telah dilakukan tim peneliti dalam hal penggunaan kriteria KKT dalam penentuan EOQ.

PEMBAHASAN

Deskripsi Permasalahan

Salah satu aspek utama dalam pembahasan terkait manajemen rantai

pasok produksi adalah menentukan nilai *Economic Order Quantity* (EOQ) sekaligus dapat menentukan total biaya minimum yang dibutuhkan dalam sistem rantai pasok tersebut. Hal tersebut secara matematika dapat digolongkan dalam permasalahan optimasi. Secara umum dalam analisa model rantai pasok, penentuan EOQ berdasarkan fungsi total biaya yang ditentukan sebagai fungsi tujuan. Analisa keoptimalan menggunakan prinsip – prinsip kalkulus yaitu kriteria turunan / turunan parsial pertama dan kedua. Dalam hal untuk dapat lebih menggambarkan kondisi real dari sistem rantai pasok, maka perkembangan model rantai pasok diarahkan untuk semakin kompleks dengan terus menambahkan aspek – aspek / asumsi – asumsi baru. Beberapa asumsi ada yang bersifat sebagai kendala yang harus dipenuhi oleh pihak – pihak dalam sistem rantai pasok. Berdasarkan prinsip optimasi, kondisi tersebut digolongkan dalam optimasi berkendala (*constrained optimization*) dan prinsip kalkulus turunan/turunan parsial tidak dapat langsung digunakan. Berdasarkan referensi yang ada, ada beberapa metode yang dapat digunakan, salah satunya yang cukup mudah diterapkan adalah kriteria Karush – Kuhn – Tucker. Dalam makalah ini akan diulas penggunaan kriteria Karush – Kuhn – Tucker dalam analisa keoptimalan model rantai pasok.

3.2. Kriteria Karush – Kuhn – Tucker

Metode KKT adalah metode optimasi dimana terdapat kendala berupa pertidaksamaan

Teorema: Teorema KKT . Misalkan $f, h, g \in \ell^1$. Misalkan x^* adalah titik reguler dan nilai minimum lokal dari permasalahan meminimumkan f dengan kendala $h(x) = 0, g(x) \leq 0$, maka akan terdapat $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ dan $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ sedemikian sehingga

1. $\mu^* \geq 0$
2. $Df(x^*) + \lambda^{*T} Dh(x^*) + \mu^{*T} Dg(x^*) = 0^T$

$$3. \mu^{*T} g(x^*) = 0.$$

D merupakan operator diferensial, λ^* merupakan vektor pengali Lagrange dan μ^* merupakan vektor pengali KKT.

3.3. Penggunaan Kriteria KKT dalam analisa keoptimalan model inventori

Permasalahan rantai pasok (*supply chain management*) merupakan permasalahan optimasi dalam menentukan keputusan optimum terkait variabel keputusan atau disebut juga *Economic Order Quantity* (EOQ) yang dapat meminimumkan total biaya dari sistem rantai pasok dan meningkatkan keuntungan untuk tiap – tiap pihak dalam sistem rantai pasok tersebut. Manajemen rantai pasok merupakan aspek penelitian yang penting dalam dunia industri. Dalam manajemen rantai pasok diperlukan proses pemodelan matematika berdasarkan asumsi – asumsi yang telah ditentukan berdasarkan kondisi yang ada dalam manajemen rantai pasok untuk penentuan formula total biaya tiap – tiap pihak dalam sistem. Kemudian penentuan total biaya yang dibutuhkan oleh sistem berdasarkan skema yang sesuai dengan strategi yang dipilih oleh tiap pihak dalam interaksi di dalam sistem rantai pasok. Dalam perkembangannya, skema yang sering diteliti adalah skema intergrasi atau kerjasama antar pihak untuk kepentingan keuntungan bersama dalam jangka panjang. Pada kenyataannya tidak semua kondisi sistem rantai pasok dapat dijelaskan dengan skema integrasi. Dalam persaingan industri, dimungkinkan tiap pihak dalam sistem rantai pasok mempunyai strategi sendiri – sendiri sesuai dengan kepentingan masing – masing, ataupun dimungkinkan adanya pihak yang mendominasi sehingga strategi yang diambil oleh pihak tertentu harus mengikuti strategi pihak yang lain yang lebih dominan. Konsep matematika yang dapat digunakan untuk menggambarkan kondisi tersebut adalah dengan menggunakan teori permainan. Formulasi

total biaya suatu sistem rantai pasok digunakan sebagai dasar (fungsi tujuan) yang akan diminimumkan dalam proses optimasi. Dalam hampir semua penelitian tentang model rantai pasok, proses optimasi untuk mendapatkan variabel keputusan yang optimum menggunakan optimasi kalkulus menggunakan kriteria turunan parsial pertama. Turunan parsial digunakan karena fungsi total biaya sebagai fungsi tujuan umumnya memuat variabel keputusan lebih dari satu. Proses optimasi tersebut merupakan optimasi tak berkendala.

Semakin berkembangnya penelitian dalam permasalahan rantai pasok, maka asumsi – asumsi yang disusun juga semakin diperluas agar didapat model matematika yang dapat menggambarkan keadaan suatu sistem rantai pasok dengan lebih baik. Terdapat satu jenis kondisi dalam rantai pasok yang menjadi suatu kendala yang harus dipenuhi oleh suatu pihak tertentu. Sebagai contoh adalah kondisi kendala tingkat layanan (*Service Level Constraint*). Kendala tingkat layanan merupakan suatu kondisi yang diterapkan oleh pihak yang memanfaatkan produk yang dihasilkan oleh pihak lain (dalam hal ini dapat dicontohkan adalah Pengecer / Retailer) untuk mencegah terjadinya kondisi kehabisan persediaan (stok) produk atau bisa disebut sebagai kondisi *Shortage*. Dalam banyak model rantai pasok, sering dijumpa asumsi bahwa kondisi *Shortage* tidak diperbolehkan, hal ini dikarenakan kondisi kehabisan produk dapat mengurangi pendapata bagi pengecer dan juga ada ada resiko kepercayaan dari konsumen. Pada kenyataannya, kondisi *Shortage* sangat sulit untuk diprediksi dan diperkirakan / estimasi, sehingga menerapkan kondisi *Service Level Constraint* guna mencegah kondisi *Shortage* menjadi pilihan alternative yang sering digunakan.

Kondisi kendala tingkat layanan secara matematika akan diformulasikan sebagai kendala dalam proses optimasi. Hal tersebut berarti proses optimasi yang

dilakukan menjadi optimasi dengan kendala (*Constrained Optimization*). Banyak metode optimasi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan optimasi dengan Kendala (*Constrained Optimization*), salah satunya adalah penerapan kondisi Karush – Kuhn – Tucker. Fungsi tujuan yang akan dioptimumkan merupakan fungsi total biaya dari sistem rantai pasok dan ditambah dengan kondisi kendala tingkat layanan sedemikian sehingga membentuk fungsi tujuan baru dengan format fungsi Lagrange dengan penambahan satu parameter pengali Lagrange λ . Kemudian proses optimasi dilakukan terhadap fungsi tujuan tersebut untuk mendapatkan nilai optimum/EOQ dari model inventori tersebut. Secara umum langkahnya dapat dirangkum sebagai berikut:

1. Penentuan turunan parsial pertama dari fungsi total biaya terhadap setiap variabel keputusan termasuk λ .
2. Setiap hasil dari langkah 1 disamadengankan dengan nol dan didapat sistem persamaan.
3. Selesaikan sistem persamaan pada (2) untuk setiap variabel keputusan termasuk λ .
4. Hasil yang didapat pada langkah (3) adalah nilai optimum / EOQ yang dicari.

Sebagai contoh misal diberikan fungsi total biaya dari suatu model inventori dengan kendala tingkat layanan yang ada dalam [17] sebagai berikut:

$$LF_z(Q, k, L, \lambda) = \lambda_p \left[\frac{D}{Q(1-\gamma)(1-\theta)(1-e_1)} (S_b + F + \right. \\ \left. \pi \frac{\sigma\sqrt{L}}{2} (\sqrt{1+k^2} - k) + C(L) \right) \\ + \frac{D}{(1-\gamma)(1-\theta)(1-e_1)} (c_{ib} + c_{pb}\gamma\theta e_2) + \\ h_{b1} \frac{D}{(1-\gamma)(1-\theta)(1-e_1)} \left(\frac{Q(1-\gamma)(1-\theta)e_1 + Q\gamma\theta e_2}{x} \right)$$

$$+ h_{b2} \left[\left(\frac{Q\gamma\theta[e_1 - e_2]}{2} \right) + k\sigma\sqrt{L} + (1 - \right. \\ \left. \beta) \frac{\sigma\sqrt{L}}{2} (\sqrt{1+k^2} - k) \right] + \frac{h_{b3}Q\gamma\theta e_2}{2} \\ + \left[\frac{(1-\lambda_p)D \left\{ S_b + c_{iv}Q\gamma\theta + c_{pv}Q\gamma\theta e_2 + c_rQ(1-\theta)(1-\gamma)e_1 + h_v \left[\frac{nQ^2}{P} - \frac{n^2Q^2}{2P} + \frac{n(n-1)Q^2(1-\gamma)(1-\theta)}{2D} \right] \right\}}{nQ(1-\gamma)(1-\theta)(1-e_1)} \right] \\ + \lambda [Q\alpha - \sigma\sqrt{L}(\sqrt{1+k^2} - k)]$$

(3.1)

dengan λ adalah pengali Lagrange yang berhubungan dengan adanya kendala tingkat layanan (*service level constraint / SLC*). Kemudian diterapkan kriteria KKT dengan mengambil turunan parsial pertama dari fungsi L terhadap semua variabel keputusan, yang dalam hal ini adalah Q, k, L dan λ sebagai parameter Lagrange untuk mendapatkan nilai EOQ. Hasil setiap turunan parsial disamadengankan nol dan didapat sistem persamaan nonlinear dalam setiap variabel keputusan. Bila diselesaikan untuk setiap variabel keputusan dengan menggunakan teknik manipulasi aljabar akan didapat nilai optimum untuk tiap – tiap variabel keputusan. Nilai optimum tersebut merupakan nilai EOQ untuk tiap variabel keputusan.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan penjelasan pada sub bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa konsep teori optimasi memegang peranan penting dalam analisa model inventori dalam permasalahan di sistem rantai pasok. Karena tujuan dari analisa model inventori dalam sistem rantai pasok adalah untuk menentukan nilai optimum dari variabel keputusan yang akhirnya akan meminimumkan total biaya yang dibutuhkan oleh sistem. Teori optimasi diterapkan terhadap fungsi total biaya dari sistem rantai pasok. Kriteria turunan parsial pertama tidak dapat langsung digunakan ketika dalam sistem rantai pasok terdapat kendala / batasan yang

harus dipenuhi, sebagai contoh adalah adanya kendala tingkat layanan (*Service Level Constraint*) dan harus menggunakan konsep optimasi berkendala. Salah satu metode optimasi berkendala yang dapat digunakan adalah kriteria *Karush – Kuhn – Tucker* (KKT).

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Alaei, S., Hajj, A., Alaei, R., Behraves, M. (2015). A Theoretical Game Approach for Two Echelon *Stochastic Inventory System*. *Acta Polytechnica Hungarica*, 12(4).
- [2] Banerjee, A. (1986). A joint economic –lot – size for purchaser and vendor. *Decision Sciences*, 3, 292-311.
- [3] Cachon, G. & Netessine, S. (2004). *Game theory in supply chain analysis*. In D. Simchi-Levi, S.D. Wu & Z.-J. Shen (Eds.), *Handbook of Qualitative Supply Chain Analysis*. 4, 200-233. US: Springer US.
- [4] Chang, H.C. & Ho, C.H. (2010). Exact closed-form solutions for optimal inventory model for items with imperfect quality and shortage back ordering. *Omega*, 38, 233-237.
- [5] Elyasi, M., Khoshalhan, F., and Khanmirzae, M. (2014). Modified economic order quantity (EOQ) model for items with imperfect quality: Game theoretical approaches. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 5, 211-222.
- [6] Goyal, S.K. (1977). An Integrated inventory model for a single supplier – single customer problem. *International Journal of Production Research*, 15, 107-111.
- [7] Goyal, S.K. & Szendrovits, A.Z. (1986). A constant lot size model with equal and unequal sized batch shipments between production stages. *Engineering Costs and Production Economics*, 10, 203 – 210.
- [8] Goyal, S.K. & Gupta, Y.P. (1989). Integrated inventory models: the buyer-vendor coordination. *European Journal of Operational Research*. 41, 261-269.
- [9] Goyal, S.K. (1995). A one-vendor multi-buyer integrated inventory model: a comment. *European Journal of Operational Research*. 82, 209-210.
- [10] Goyal, S.K. (1988). A joint economic-lot-size model for purchaser and vendor: a comment. *Decision Sciences*. 19, 236-241.
- [11] Hsu, J.-T. & Hsu, L.-F. (2012). An Integrated Vendor – Buyer Cooperative Inventory Model for Items with Imperfect Quality and Shortage Backordering. *Advances in Decision Sciences*.
- [12] Huang, C.K. (2002). An integrated vendor-buyer cooperative model for items with imperfect quality. *Production Planning and Control*, 13, 355 – 361.
- [13] Huang, C.K. (2004). An optimal policy for a single-vendor-buyer integrated production-inventory problem with process unreliability consideration. *International Journal of Production Economics*. 91, 91-98.
- [14] Hsu, J.-T. & Hsu, L.-F. (2012). An integrated single – vendor single – buyer production inventory model for items with imperfect quality and inspection errors. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 3, 703 – 720.
- [15] Sadigh, A.L., Chaharsooghi, S.K., Sheikhmohammady, M. (2016). A Game Theoretic

- Approach to Coordination of Pricing, Advertising and Inventory Decisions in a Competitive Supply Chain. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 12(1), 337-355.
- [16] Salameh, M.K. & Jaber, M.Y. (2000). Economic production quantity model for items with imperfect quality. *International Journal of Production Economics*, 64, 59 – 64.
- [17] Setiawan, R.(2016). A Game Theoretical Approach in Vendor – Buyer Probabilistic Inventory System with Imperfect Quality, Inspection Error, Minimum Service Level Constraint and Partial Backordering. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 100(10), 1695-1704.
- [18] Setiawan, R., & Triyanto. (2016), A Probabilistic Integrated Vendor – Buyer Cooperative Inventory Model with Imperfect Quality Items, Controllable Lead Time, Uncertainty Demands, Inspection Error, Shortage and Backordering Allowed, *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 99(1), 109-132.
- [19] Setiawan, R., Kuswardi, Y., Pramudya, I. (2016). Aplikasi Kalkulus Optimasi dalam Analisa Optimum Variabel Keputusan Model Matematika Inventori Terintegrasi Dua Level dengan Produk Tidak Sempurna, Lead Free Demand dan Kendala Tingkat Layanan. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2016*, Program Studi S2 Pendidikan Matematika, Universitas Sebelas Maret, 977-984.
- [20] Setiawan, R. (2017). Several Comparison Result of Two Types of Equilibrium (Pareto Schemes and Stackelberg Scheme) of Game Theory Approach in Probabilistic Vendor – Buyer Supply Chain System with Imperfect Quality. *The 1st International Conference on Mathematics, Environmental and Education (ICoSMEE 2017)*, Sebelas Maret University, *IOP Journal of Physics: Proceeding Series*, 983.

Ucapan Terima Kasih

Peneliti berterimakasih kepada LPPM UNS, karena penelitian ini merupakan bagian dari keterlaksanaan Hibah Riset Fundamental dana PNBPN UNS 2018 dengan nomor kontrak 543 UN27.21/PP/2018