ISSN 2614-0357

ANALISIS GABUNGAN STRATEGI MEMILIH NOTASI YANG TEPAT DAN MEMBENTUK MASALAH YANG SETARA DALAM MENENTUKAN SISA PEMBAGIAN

Indah Wahyu Rachmawati[1], Rubono Setiawan[2]
[1,2)]Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Sebelas Maret
Jalan Ir.Sutami No.36 A Kentingan Surakarta

e-mail : indah.wr12@gmail.com
e-mail : rubono.matematika@staff.uns.ac.id.

ABSTRAK

Materi teori bilangan khususnya menentukan sisa pembagian dari suatu bilangan merupakan masalah matematika yang sering muncul dalam soal olimpiade matematika SMP baik dari tingkat kabupaten sampai tingkat nasional. Bilangan yang dimaksud berupa bilangan berpangkat maupun bilangan yang tidak diketahui nilainya, yang biasanya disimbolkan dengan suatu *variabel*. Untuk menentukan sisa pembagian dari suatu bilangan tentu dibutuhkan suatu strategi untuk menyelesaikannya. Terdapat beberapa macam strategi yang dapat digunakan, dalam penelitian ini akan dilakukan analisis terhadap penggunaan strategi memilih notasi yang tepat dan membentuk masalah yang setara untuk memecahkan masalah menentukan sisa pembagian. Penggunaan kedua strategi tersebut dilakukan dengan menerapkan strategi memilih notasi yang tepat terlebih dahulu baru kemudian membentuk masalah yang setara berdasarkan notasi yang telah ditetapkan. Selain penggunaan kedua strategi tersebut, pemecahan masalah matematika tersebut disajikan menggunakan langkah Polya, yaitu memahami masalah, menyusun rencana penyelesaian, melaksanakan rencana penyelesaian, dan memeriksa kembali.

Kata Kunci : notasi, masalah setara, sisa pembagian, langkah Polya

PENDAHULUAN

Masalah dihadapi oleh setiap orang tanpa terkecuali oleh anak usia sekolah dalam lingkungan belajarnya. Dalam hal ini, permasalahan yang dimaksud berupa soal-soal nonrutin. Soal nonrutin adalah soal yang penyelesaiannya memerlukan pemikiran lebih lanjut karena tidak mudah untuk diselesaikan dengan prosedur rutin seperti yang telah dipelajari di kelas, sehingga menantang untuk diselesaikan oleh siswa. Soal olimpiade biasanya berupa soal nonrutin, sehingga soal tersebut tentu tidak mudah untuk diselesaikan dengan prosedur rutin yang telah diketahui oleh siswa.

Soal olimpiade matematika memuat materi antara lain aljabar dan operasi akar, teori bilangan, teori himpunan, teori fungsi, persamaan dan pertidaksamaan, pengukuran, kombinatorik, peluang dan statistik, dan geometri. Salah satu masalah matematika yang sering muncul dalam olimpiade baik dari tingkat kabupaten sampai nasional adalah materi teori bilangan mengenai penentuan sisa pembagian dari suatu bilangan. Bilangan tersebut dapat berupa bilangan berpangkat maupun bilangan yang tidak diketahui nilainya, yang biasanya disimbolkan dengan suatu *variabel*.

Berbagai macam masalah matematika mempunyai ciri dan memerlukan strategi yang khas untuk menyelesaikannya. Termasuk masalah matematika untuk menentukan sisa pembagian dari suatu bilangan. Salah satu di antaranya adalah melalui pemecahan masalah matematika.

Pemecahan masalah matematika dapat dilakukan dengan berbagai macam strategi. Namun, yang menjadi persoalan adalah bagaimana menentukan strategi yang terbaik dan terefisien, yaitu dengan menjadikan masalah yang dihadapi terlihat lebih sederhana sehingga mudah untuk dipecahkan.

Berdasarkan uraian di atas penulis tertarik untuk mengkaji lebih dalam mengenai penggunaan strategi memilih notasi yang tepat dan membentuk masalah yang setara dalam menentukan sisa pembagian dari suatu bilangan. Hal tersebut dipilih karena masalah menentukan sisa pembagian dari suatu bilangan merupakan masalah yang sering muncul dalam olimpiade matematika dan soalnya bervariasi, mulai dari pembagian bilangan berpangkat sangat besar sampai bilangan yang tidak diketahui nilainya yang tidak dapat diselesaikan dengan prosedur rutin, atau dengan alat hitung (kalkulator). Kedua strategi tersebut dipilih karena dalam menentukan sisa pembagian dari suatu bilangan diperlukan notasi yang tepat untuk menuliskan maksud dari soal yang diberikan, kemudian dibentuk masalah yang setara dengan notasi yang telah dipilih, sehingga soal tersebut akan lebih mudah untuk diselesaikan. Oleh karena itu, kedua strategi tersebut dianggap tepat untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan menentukan sisa pembagian dari suatu bilangan.

PEMBAHASAN

Masalah Matematika

Masalah matematika adalah suatu persoalan atau pertanyaan yang bersifat menantang yang tidak dapat diselesaikan dengan prosedur rutin. Lencher (Hartono, Yusuf, 2014, p.2) mendeskripsikan masalah matematika sebagai soal matematika yang strategi penyelesaiannya tidak langsung terlihat, sehingga dalam penyelesaiannya memerlukan pengetahuan, keterampilan dan pemahaman yang telah dipelajari sebelumnya.

Lebih lanjut, Polya (Hartono, Yusuf, 2014, p.2) mengemukakan dua macam masalah matematika yaitu:

1. Masalah untuk menemukan (*problem to find*) yaitu kita mencoba untuk mengkonstruksi semua jenis objek atau informasi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut.
2. Masalah untuk membuktikan (*problem to prove*) yaitu kita menunjukkan salah satu kebenaran pernyataan, pernyataan tersebut benar atau salah. Masalah jenis ini mengutamakan hipotesis atau konklusi dari suatu teorema yang kebenarannya harus dibuktikan.

Pemecahan Masalah Matematika

Lencher (Hartono, Yusuf, 2014, p.3) mendefinisikan pemecahan masalah matematika sebagai
"proses menerapkan pengetahuan matematika yang telah diperoleh sebelumnya ke dalam situasi yang baru yang belum dikenal".

Dalam penerapannya, aktivitas pemecahan masalah dapat menunjang kemampuan matematika yang lain seperti komunikasi dan bernalar secara logis. Menurut Polya (Shadiq, Fajar, 2014, p.105-108) terdapat empat tahapan penting yang harus ditempuh dalam memecahkan masalah, yaitu:

1. Memahami masalah
   Pada langkah ini, para pemecah masalah harus dapat menentukan dengan jeli apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan. Hal ini dimaksudkan untuk mempermudah memahami masalahnya dan mendapatkan gambaran umum penyelesaiannya.
2. Menyusun rencana penyelesaian

Pada langkah ini, para pemecah masalah diarahkan untuk dapat mengidentifikasi strategi-strategi pemecahan masalah yang sesuai untuk memecahkan masalah yang dihadapinya.

3. Melaksanakan rencana penyelesaian
   Pada langkah ini, para pemecah masalah diarahkan untuk memecahkan masalah dengan menerapkan strategi yang telah ditentukan pada langkah sebelumnya dengan tekun dan teliti.
4. Memeriksa kembali
   Pada langkah ini penting untuk dilakukan untuk menganalisis dan mengevaluasi apakah strategi yang diterapkan dan hasil yang diperoleh sudah sesuai dengan ketentuan dan tidak terjadi kontradiksi dengan yang ditanya.

Strategi Pemecahan Masalah Matematika

Strategi pemecahan masalah matematika merupakan cara berpikir yang dapat digunakan ketika hendak menyelesaikan suatu masalah yang dapat diselesaikan dengan cabang ilmu matematika. Pemecahan masalah matematika dapat dilakukan dengan berbagai macam strategi. Namun, yang menjadi persoalan adalah bagaimana menentukan strategi yang tepat, yaitu menjadikan masalah yang dihadapi terlihat lebih sederhana sehingga mudah untuk dipecahkan.

Loren C. Larson dalam buku "*Problem Solving through Problem*" merangkum strategi pemecahan masalah matematika menjadi dua belas macam: mencari pola, buatlah gambar, bentuklah masalah yang setara, lakukan modifikasi pada soal, pilih notasi yang tepat, pergunakan simetri, kerjakan dalam kasus-kasus, bekerja mundur, berargumentasi dengan kontradiksi, pertimbangkan peritas, perhatikan kasus-kasus ekstrim, dan lakukan perumuman.

Pembagian Bersisa

Untuk bilangan-bilangan bulat a dan b, jika $b \nmid a$, maka pembagian itu akan bersisa.

Teorema (Burton, David M, 2007, p.17) :

Untuk sebarang bilangan-bilangan bulat a dan b dengan $b > 0$, ada tepat satu pasang bilangan-bilangan bulat q dan r sehingga $a = bq + r$ dengan $0 \leq r < b$. Jika $b \nmid a$ maka r memenuhi ketidaksamaan $0 < r < b$. Bilangan bulat q dan r, masing-masing disebut hasil bagi dan sisa pembagian a oleh b.

Kongruensi

1. Aritmetika modulo
   Misalkan a adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat positif. Operasi $a\, mod\, m$ (dibaca "$a\, modulo\, m$") memberikan sisa jika a dibagi dengan m. Notasi : $a\, mod\, m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$.
   Bilangan m disebut **modulus** atau **modulo**, dan hasil aritmetika modulo m terletak di dalam himpunan $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$. Berikut adalah beberapa contoh hasil operasi dengan operator modulo:
   i. $23\, mod\, 5 = 3$ $(23 = 5 \cdot 4 + 3)$
   ii. $6\, mod\, 8 = 6$ $(6 = 8 \cdot 0 + 6)$
   iii. $0\, mod\, 12 = 0$ $(0 = 12 \cdot 0 + 0)$
   iv. $-41\, mod\, 9 = 4$ $(-41 = 9(-5) + 4)$
   Penjelasan untuk iv :
   Karena a negatif, bagi $|a|$ dengan m mendapatkan sisa r'. Maka $a\, mod\, m = m - r'$ bila $r' \neq 0$. Jadi $|-41|\, mod\, 9 = 5$, sehingga $-41\, mod\, 9 = 9 - 5 = 4$
2. Kekongruenan modulo m
   Bila dua bilangan bulat a dan b dibagi dengan bilangan bulat positif (bilangan asli) m dan mempunyai sisa yang sama maka dikatakan bahwa:
   "a kongruen dengan b modulo m", dan ditulis $a \equiv b\ (mod\ m)$.

Demikian juga:
"b kongruen dengan a modulo m", dan ditulis $b \equiv a \ (mod\ m)$.
Jadi bila $a \equiv b \ (mod\ m)$, maka berlaku juga $b \equiv a \ (mod\ m)$.

Bila $a \equiv b \ (mod\ m)$, maka secara sederhana dapat diartikan bahwa $(a - b)$ habis dibagi dengan m atau $a - b = k \cdot m$ (k adalah bilangan bulat). Ini dapat dibuktikan sebagai berikut:
$a \equiv b \ (mod\ m)$, artinya a dan b bila dibagi dengan m mempunyai sisa yang sama.
Misal: $a \div m$ bersisa p, dengan hasil baginya k_1

$b \div m$ bersisa p, dengan hasil baginya k_2 , maka dapat ditulis

$$a = k_1 m + p$$
$$b = k_2 m + p$$

Jadi $a - b = (k_1 - k_2) \cdot m$ atau $-b = k \cdot m$.

Sifat-sifat Bilangan Berpangkat Bulat

Untuk sebarang bilangan real a dan b serta sebarang bilangan bulat m dan n berlaku sifat-sifat berikut ini.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(ab)^m = a^m b^m$
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ dengan $m > n$ dan $a \neq 0$
5. $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ dengan $m < n$ dan $a \neq 0$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ dengan $b \neq 0$
7. $a^0 = 1$ dengan $a \neq 0$
8. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dengan $a \neq 0$

Strategi Memilih Notasi yang Tepat dalam Menentukan Sisa Pembagian

Memilih notasi yang tepat merupakan strategi awal untuk menyelesaikan masalah matematika yaitu dengan menuliskannya ke dalam simbol-simbol matematika. Dalam menyelesaikan masalah matematika tentu kita harus memahami terlebih dahulu baru kemudian masalah tersebut dapat diselesaikan. Biasanya langkah awal untuk menyelesaikan masalah matematika adalah menuliskan masalah tersebut ke dalam notasi atau simbol-simbol matematika. Simbol-simbol tersebut dapat berupa variabel, konstanta ataupun parameter.

Variabel adalah lambang pengganti suatu bilangan yang belum diketahui nilainya dengan jelas. Variabel disebut juga peubah, biasanya dilambangkan dengan huruf kecil $a, b, c, \ldots, z$. Konstanta adalah suku dari suatu bentuk aljabar yang berupa bilangan dan tidak memuat variabel. Misalnya diketahui $f(x) = x^2 + 2x + 3$ maka x merupakan variabel dan 3 adalah konstanta.

Parameter dilambangkan dengan huruf, bisa diganti dengan bilangan, mirip dengan variabel tetapi memiliki makna yang berbeda. Misalnya diketahui fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c\,; a \neq 0,\ a, b,$ dan c merupakan parameter dari persamaan tersebut. Walaupun kita mengganti nilai $a, b,$ dan c dengan bilangan apa saja asalkan sesuai dengan syarat $a \neq 0$ tetap saja $f(x)$ akan berbentuk fungsi kuadrat.

Notasi yang akan digunakan untuk menuliskan masalah matematika harus tepat, yaitu yang dapat menjelaskan maksud dari soal yang diberikan sehingga dapat mempermudah kita untuk menyelesaikannya. Misalnya, suatu bilangan kuadrat dibagi 2, dapat dinotasikan dengan $(2n)^2, (2n+1)^2$. Notasi $2n$ dipilih karena mewakili bilangan yang habis dibagi oleh 2 dan dipilih notasi $2n + 1$ karena mewakili bilangan yang tidak habis dibagi oleh 2, karena dalam soal tertulis suatu bilangan kuadrat dibagi 2, maka dari notasi-notasi tersebut dapat pula dituliskan bilangan kuadrat yang dimaksud adalah $(2n)^2, (2n+1)^2$.

Selain itu, semua konsep kunci dalam soal haruslah teridentifikasi dan sebisa mungkin dinotasikan. Selanjutnya dicari hubungan antarnotasi yang telah ditetapkan. Sebagai contoh, suatu bilangan kuadrat dibagi 2, maka kemungkinan

ISSN 2614-0357

sisanya dapat ditentukan dengan menentukan notasi yang tepat dari bilangan kuadrat yang dimaksud terlebih dahulu, seperti yang telah dituliskan pada paragraf sebelumnya, yaitu $(2n)^2, (2n+1)^2$. Selanjutnya dicari hubungan antarnotasi yang telah ditetapkan. Dari notasi yang ditentukan, terdapat hubungan bahwa $2n$ tidak lain adalah bilangan genap, apabila $2n$ dikuadratkan, hasilnya pun bilangan genap, sehingga ketika dibagi oleh 2 akan bersisa 0, dan untuk bilangan $2n+1$ merupakan bilangan ganjil, apabila $2n+1$ dikuadratkan, hasilnya pun merupakan bilangan ganjil, sehingga ketika dibagi oleh 2 akan bersisa 1. Jadi, bilangan kuadrat dibagi 2 memiliki kemungkinan sisa 0 atau 1.

Strategi Membentuk Masalah yang Setara dalam Menentukan Sisa Pembagian

Masalah yang setara merupakan masalah yang memiliki tingkatan yang sama, sedangkan masalah yang ekuivalen merupakan masalah yang memiliki nilai (ukuran, arti, atau efek) yang sama. Namun, baik setara atau ekuivalen menyatakan kesepadanan, hanya saja istilah ekuivalen biasanya lebih sering digunakan dalam matematika. Misalnya $2166 = 154 \times 14 + 10$ setara atau ekuivalen dengan kita menyatakan 10 kongruen dengan 2166 modulo 14.

Membentuk masalah yang setara merupakan strategi yang digunakan ketika kita menghadapi masalah kompleks, seperti soal dengan bilangan yang terlalu besar (misalnya 2007^{2009}), terlalu kecil (misalnya $0{,}00000000023$), atau soal yang memiliki pola atau perhitungan yang cukup kompleks.

Strategi ini dilakukan dengan membentuk ulang masalah kompleks ke suatu bentuk yang lain yang setara dan lebih sederhana sehingga diperoleh pola penyelesaiannya. Setelah itu pola tersebut kita terapkan untuk menyelesaikan masalah kompleks sebelumnya.

Dalam memecahkan masalah yang berkaitan dengan menentukan sisa pembagian dari suatu bilangan seringkali dijumpai bilangan yang terlalu besar nilainya, atau bahkan bilangan yang belum diketahui nilainya yang hanya disimbolkan dalam bentuk *variabel* sehingga perlu membentuk masalah yang setara dari soal tersebut, misalnya dengan menggunakan kongruensi untuk mempermudah menyelesaikan masalah kompleks tersebut.

Sebagai contoh, tentukan sisa pembagian 2^{2017} oleh 13. Apabila kita menghadapi masalah seperti itu, kita tidak perlu menghitung hasil 2^{2017} melainkan selesaikanlah dengan membentuk masalah yang setara dari masalah tersebut, yaitu dengan menggunakan kongruensi. Langkah pertama, ubah bentuk 2^{2017} ke dalam perkalian bilangan berpangkat yang lebih sederhana sebagai berikut $2^{2017} \equiv 2^{2016+1} \equiv 2^{2016} \cdot 2^1 \equiv (2^6)^{336} \cdot 2^1$, kemudian bilangan berpangkat tersebut ubah ke bentuk pembagian bersisa dengan pembaginya adalah 13 (sesuai soal) sebagai berikut $2^{2017} \equiv (5 \cdot 13 - 1)^{336} \cdot 2$, dari bentuk ini dapat dituliskan sebagai $2^{2017} \equiv (-1)^{336} \cdot 2 \ (mod\ 13) \equiv 1 \cdot 2 \ (mod\ 13) \equiv 2 \ (mod\ 13)$. Dengan kata lain, 2^{2017} dibagi oleh 13 bersisa 2.

Strategi Memilih Notasi yang Tepat dan Membentuk Masalah yang Setara dalam Menentukan Sisa Pembagian

Masalah matematika dapat diselesaikan dengan berbagai macam strategi, sehingga tidak menutup kemungkinan suatu masalah matematika dapat diselesaikan dengan memadukan dua macam strategi atau lebih. Teori bilangan khususnya menentukan sisa pembagian juga merupakan masalah yang bervariasi dan sering muncul dalam olimpiade matematika. Oleh karena itu, dalam menentukan sisa pembagian dari suatu bilangan akan digunakan dua macam strategi yaitu memilih notasi yang tepat dan membentuk masalah yang setara.

Penggunaan kedua strategi tersebut dalam menentukan sisa pembagian dari suatu bilangan, terlebih dahulu akan dipilih notasi yang tepat untuk menuliskan masalah yang diberikan supaya dapat menjelaskan maksud dari soal tersebut dan dicari hubungan dari notasi yang telah ditetapkan, kemudian membentuk masalah yang setara berdasarkan notasi tersebut.

Selain penggunaan strategi memilih notasi yang tepat dan membentuk masalah yang setara, supaya pemikiran dan langkah pengerjaannya lebih terarah maka masalah tersebut hendaknya dipecahkan dengan menggunakan langkah Polya yaitu, memahami masalah, menyusun rencana penyelesaian, melaksanakan rencana penyelesaian dan memeriksa kembali.

Contoh 1 (OSN Matematika Tingkat Kabupaten Tahun 2013)

Jika $a, b, c,$ dan d adalah bilangan bulat positif dibagi 13 berturut-turut bersisa $12, 9, 11,$ dan 7, maka $3a + 4b - 3c + 2d$ dibagi 13 akan bersisa...

1) Memahami masalah

Masalah tersebut merupakan masalah mengenai teori bilangan, yaitu menentukan sisa pembagian. Penyelesaian dari masalah tersebut diarahkan untuk memilih notasi yang tepat dan membentuk masalah yang setara dari masalah yang diberikan. Memilih notasi yang tepat dapat dilakukan dengan memilih simbol, variabel atau parameter yang dapat mewakili pernyataan yang terdapat pada masalah yang telah diberikan. Membentuk masalah yang setara dapat dilakukan dengan membawa masalah tersebut ke dalam bentuk kongruensi atau modulo. Berdasarkan masalah yang diberikan dapat dituliskan beberapa poin sebagai berikut.

Diketahui :

- $a, b, c,$ dan d adalah bilangan bulat positif
- $a, b, c,$ dan d dibagi 13 berturut-turut bersisa $12, 9, 11,$ dan 7

Ditanya : $3a + 4b - 3c + 2d$ dibagi 13 akan bersisa $= \ldots$

2) Menyusun rencana penyelesaian

Untuk menyelesaikan masalah tersebut akan digunakan 2 strategi, yaitu :

a. Memilih notasi yang tepat, dan
b. Membentuk masalah yang setara, yaitu dengan menggunakan kongruensi atau modulo.

3) Melaksanakan rencana penyelesaian

Akan ditentukan penyelesaian dari masalah tersebut dengan menggunakan strategi yang telah dipilih sebagai berikut:

a. Memilih notasi yang tepat

Misal, a, b, c, d : produk bilangan yang telah dibagi q

q : pembagi, pada soal diketahui $q = 13$

k, l, m, n : hasil bagi

s : sisa pembagian

Sehingga, diperoleh hubungan,

$a = 13k + 12$
$b = 13l + 9$
$c = 13m + 11$
$d = 13n + 7$

b. Membentuk masalah yang setara

Berdasarkan poin sebelumnya, dapat dibentuk masalah yang setara yaitu dengan menggunakan kongruensi (modulo) sebagai berikut.

$a \equiv 12\ (mod\ 13) \rightarrow 3a \equiv 36\ (mod\ 13) \leftrightarrow 3a \equiv 10\ (mod\ 13)$

$b \equiv 9\ (mod\ 13) \rightarrow 4b \equiv 36\ (mod\ 13) \leftrightarrow 4b \equiv 10\ (mod\ 13)$

$c \equiv 11\ (mod\ 13) \rightarrow 3c \equiv 33\ (mod\ 13) \leftrightarrow 3c \equiv 7\ (mod\ 13)$

$d \equiv 7\ (mod\ 13) \rightarrow 2d \equiv 14\ (mod\ 13) \leftrightarrow 2d \equiv 1\ (mod\ 13)$

$3a + 4b - 3c + 2d \equiv 10 + 10 - 7 + 1\ (mod\ 13)$

$\equiv 14\ (mod\ 13)$

$\equiv 1\ (mod\ 13)$

Diperoleh $3a + 4b - 3c + 2d \equiv 1\ (mod\ 13)$ yang artinya sisa pembagian $3a + 4b - 3c + 2d$ oleh 13 adalah 1.

$\therefore 3a + 4b - 3c + 2d$ dibagi 13 akan bersisa 1.

4) Memeriksa kembali

Pada soal tersebut, dipilih notasi $a = 13k + 12$; $b = 13l + 9$; $c = 13m + 11$; $d = 13n + 7$ yang dapat mewakili pernyataan yang terdapat pada soal, kemudian dibentuk masalah yang setara dari pernyataan tersebut dengan menggunakan kongruensi, sehingga diperoleh $a \equiv 12\ (mod\ 13)$; $b \equiv 9\ (mod\ 13)$; $c \equiv 11\ (mod\ 13)$; $d \equiv 7\ (mod\ 13)$. Dari bentuk ini, kita bawa pernyataan tersebut sesuai dengan perintah soal, diperoleh $3a \equiv 10\ (mod\ 13)$; $4b \equiv 10\ (mod\ 13)$; $3c \equiv 7\ (mod\ 13)$; $2d \equiv 1\ (mod\ 13)$. Setelah itu, kita operasikan sisa pembagian dari masing-masing pernyataan tersebut, diperoleh $3a + 4b - 3c + 2d \equiv 10 + 10 - 7 + 1\ (mod\ 13) \equiv 14\ (mod\ 13)\ \equiv 1\ (mod\ 13)$.Dengan kata lain, sisa pembagian $3a + 4b - 3c + 2d$ oleh 13 adalah 1.

Dengan demikian, dengan menggunakan strategi memilih notasi yang tepat dan membentuk masalah yang setara, masalah yang berkaitan dengan menentukan sisa pembagian akan mudah diselesaikan, meskipun bilangan yang dimaksud tidak diketahui nilainya.

Contoh 2 (OSN Matematika Tingkat Kabupaten Tahun 2007)

Suatu bilangan kuadrat dibagi 3, maka kemungkinan sisanya adalah . . .

1) Memahami masalah

Masalah tersebut merupakan masalah mengenai teori bilangan, yaitu menentukan sisa pembagian. Penyelesaian dari masalah tersebut diarahkan untuk memilih notasi yang tepat dan membentuk masalah yang setara dari masalah yang diberikan. Memilih notasi yang tepat dapat dilakukan dengan memilih simbol, variabel atau parameter yang dapat mewakili pernyataan yang terdapat pada masalah yang telah diberikan. Membentuk masalah yang setara dapat dilakukan dengan membawa masalah tersebut ke dalam bentuk kongruensi atau modulo. Berdasarkan masalah yang diberikan dapat dituliskan beberapa poin sebagai berikut.

Diketahui : Suatu bilangan kuadrat

Ditanya : Kemungkinan sisanya apabila bilangan kuadrat tersebut dibagi dengan 3 adalah . . .

2) Menyusun rencana penyelesaian

Untuk menyelesaikan masalah tersebut akan digunakan 2 strategi, yaitu :

a. Memilih notasi yang tepat, dan
b. Membentuk masalah yang setara, yaitu dengan menggunakan kongruensi atau modulo.

3) Melaksanakan rencana penyelesaian

Akan ditentukan penyelesaian dari masalah tersebut dengan menggunakan strategi yang telah dipilih sebagai berikut :

a. Memilih notasi yang tepat

Misalkan bilangan kuadrat yang dimaksud adalah :

$$(3n)^2, (3n + 1)^2, (3n + 2)^2$$

b. Membentuk masalah yang setara

Berdasarkan poin sebelumnya, dapat dibentuk masalah yang setara yaitu dengan menggunakan kongruensi (modulo) sebagai berikut.

Untuk $\boldsymbol{(3n)^2}$

$$\begin{aligned}(3n)^2 &\equiv (3 \cdot n + 0)^2 \\ &\equiv 0^2\ (mod\ 3) \\ &\equiv 0\ (mod\ 3)\end{aligned}$$

Diperoleh bilangan kuadrat $\boldsymbol{(3n)^2}$dibagi 3 bersisa 0, dengan kata lain $\boldsymbol{(3n)^2}$ habis dibagi 3.

Untuk $\boldsymbol{(3n + 1)^2}$

$$(3n+1)^2 \equiv (3 \cdot n+1)^2$$
$$\equiv 1^2 \ (mod\ 3)$$
$$\equiv 1 \ (mod\ 3)$$

Diperoleh bilangan kuadrat $(\boldsymbol{3n+1})^{\boldsymbol{2}}$ dibagi 3 bersisa1.

Untuk $(\boldsymbol{3n+2})^{\boldsymbol{2}}$

$$(3n+2)^2 \equiv (3 \cdot n+2)^2$$
$$\equiv 2^2 \ (mod\ 3)$$
$$\equiv 4 \ (mod\ 3)$$
$$\equiv 1 \ (mod\ 3)$$

Diperoleh bilangan kuadrat $(\boldsymbol{3n+2})^{\boldsymbol{2}}$ dibagi 3 bersisa 1.

∴ Suatu bilangan kuadrat dibagi 3, maka sisanya adalah 0 atau 1.

4) Memeriksa kembali

Suatu bilangan kuadrat dibagi 3, dapat dinotasikan dengan $(3n)^2, (3n+1)^2, (3n+2)^2$. Notasi $3n$ dipilih karena mewakili bilangan yang habis dibagi oleh 3, dipilih notasi $3n+1$ dan $3n+2$ karena mewakili bilangan yang tidak habis dibagi oleh 3, karena dalam soal tertulis suatu bilangan kuadrat dibagi 3, maka dari notasi-notasi tersebut dapat pula dituliskan bilangan kuadrat yang dimaksud adalah $(3n)^2, (3n+1)^2, (3n+2)^2$.

Setelah ditentukan notasi untuk masing-masing pertanyaan yaitu, $(3n)^2, (3n+1)^2$, dan $(3n+2)^2$. Kemudian dibentuk masalah yang setara dari pernyataan tersebut dengan menggunakan kongruensi, sehingga diperoleh $(3n)^2 \equiv (3 \cdot n+0)^2$; $(3n+1)^2 \equiv (3 \cdot n+1)^2$; $(3n+2)^2 \equiv (3 \cdot n+2)^2$. Dari bentuk ini, kita bawa pernyataan tersebut sesuai dengan perintah soal, diperoleh

$(3n)^2 \equiv 0^2 \ (mod\ 3) \equiv 0 \ (mod\ 3)$;

$(3n+1)^2 \equiv 1^2 \ (mod\ 3) \equiv 1 \ (mod\ 3)$;

$(3n+2)^2 \equiv 2^2 \ (mod\ 3) \equiv 4 \ (mod\ 3) \equiv 1 \ (mod\ 3)$.

Dengan kata lain, suatu bilangan kuadrat dibagi 3, maka sisanya adalah 0 atau 1.

Dengan demikian, dengan menggunakan strategi memilih notasi yang tepat dan membentuk masalah yang setara, masalah yang berkaitan dengan menentukan sisa pembagian akan mudah diselesaikan, meskipun bilangan yang dimaksud tidak diketahui nilainya.

Contoh 3 (OSN Matematika Tingkat Provinsi Tahun 2011)

Jika bilangan bulat x dan y dibagi 4, maka bersisa 3. Jika bilangan $x - 3y$ dibagi 4, maka bersisa . . .

1) Memahami masalah

Masalah tersebut merupakan masalah mengenai teori bilangan, yaitu menentukan sisa pembagian. Penyelesaian dari masalah tersebut diarahkan untuk memilih notasi yang tepat dan membentuk masalah yang setara dari masalah yang diberikan. Memilih notasi yang tepat dapat dilakukan dengan memilih simbol, variabel atau parameter yang dapat mewakili pernyataan yang terdapat pada masalah yang telah diberikan. Membentuk masalah yang setara dapat dilakukan dengan membawa masalah tersebut ke dalam bentuk kongruensi atau modulo. Berdasarkan masalah yang diberikan dapat dituliskan beberapa poin sebagai berikut.

Diketahui : Bilangan bulat x dan y dibagi 4, bersisa 3.

Ditanya : Bilangan $x - 3y$ dibagi 4, bersisa . . .

2) Menyusun rencana penyelesaian

Untuk menyelesaikan masalah tersebut akan digunakan 2 strategi, yaitu :

a. Memilih notasi yang tepat, dan
b. Membentuk masalah yang setara, yaitu dengan menggunakan kongruensi atau modulo.

3) Melaksanakan rencana penyelesaian

Akan ditentukan penyelesaian dari masalah tersebut dengan menggunakan strategi yang telah dipilih sebagai berikut :

a. Memilih notasi yang tepat

Misal x, y : produk bilangan yang telah dibagi q

q : pembagi, pada soal diketahui $q = 4$

m, n : hasil bagi

s : sisa pembagian, pada soal diketahui $s = 3$

Sehingga, diperoleh hubungan,

$x = 4m + 3$

$y = 4n + 3$

b. Membentuk masalah yang setara

Berdasarkan poin sebelumnya, dapat dibentuk masalah yang setara yaitu dengan menggunakan kongruensi (modulo) sebagai berikut.

$x \equiv 3\ (mod\ 4)$

$y \equiv 3\ (mod\ 4) \leftrightarrow 3y \equiv 9(mod\ 4)$

Sehingga diperoleh,

$x - 3y \equiv (3 - 9)(mod\ 4)$

$\equiv (-6)(mod\ 4)$

$\equiv (-2)(mod\ 4)$

Menurut aritmetika modulo, karena a negatif, bagi $|a|$ dengan m mendapatkan sisa r'. Maka $a\ mod\ m = m - r$' bila $r' \neq 0$.

Jadi $|-2|\ mod\ 4 = 4 - 2$, sehingga $-2\ mod\ 4 = 4 - 2 = 2$

Diperoleh bilangan $x - 3y$ dibagi 4, bersisa 2.

4) Memeriksa kembali

Pada soal tersebut, setelah ditentukan notasi untuk masing-masing pernyataan yaitu, $= 4m + 3$; $y = 4n + 3$ kemudian dibentuk masalah yang setara dari pernyataan tersebut dengan menggunakan kongruensi, sehingga diperoleh $x \equiv 3\ (mod\ 4)$; $y \equiv 3\ (mod\ 4)$. Dari bentuk ini, kita bawa pernyataan tersebut sesuai dengan perintah soal, diperoleh $x \equiv 3\ (mod\ 4)$; $y \equiv 3\ (mod\ 4) \leftrightarrow 3y \equiv 9(mod\ 4)$.

Setelah itu, kita operasikan sisa pembagian dari masing-masing pernyataan tersebut, diperoleh $x - 3y \equiv (3 - 9)(mod\ 4) \equiv (-6)(mod\ 4) \equiv (-2)(mod\ 4)$, dengan menggunakan aritmetika modulo diperoleh $|-2|\ mod\ 4 = 4 - 2$, sehingga $-2\ mod\ 4 = 4 - 2 = 2$, sehingga bilangan $x - 3y$ dibagi 4, bersisa 2.

Dengan demikian, dengan menggunakan strategi memilih notasi yang tepat dan membentuk masalah yang setara, masalah yang berkaitan dengan menentukan sisa pembagian akan mudah diselesaikan, meskipun bilangan yang dimaksud tidak diketahui nilainya.

KESIMPULAN

Berdasarkan pemaparan materi di atas, dapat disimpulkan bahwa memilih notasi yang tepat dan membentuk masalah yang setara merupakan perpaduan strategi yang tepat dalam menentukan sisa pembagian dari suatu bilangan. Dalam penerapannya, memilih notasi yang tepat dilakukan terlebih dahulu baru kemudian membentuk masalah yang setara berdasarkan notasi yang telah ditetapkan. Namun, selain penggunaan kedua strategi tersebut hendaknya juga menggunakan langkah Polya supaya pemikiran dan langkah pengerjaannya lebih terarah.

REFERENSI

[1] Burton, D. M. (2007). *Elementary Number Theory*. New York: McGraw-Hill.

[2] Farikhin. (2010). *Mari Berpikir Matematis: Panduan Olimpiade Sains Nasional SMP*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

[3] Hartono, Y. (ed.) (2014). *Strategi Pemecahan Masalah*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

[4] Larson, L. (1983). *Problem-Solving Through Problems*. New York: Springer Verlag.

[5] Shadiq, F. (2014). *Pembelajaran Matematika: Cara Meningkatkan Kemampuan Berpikir Siswa*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

[6] Sukino. (2007). *Matematika untuk SMA Kelas X*. Jakarta: Erlangga. Tim Pustaka Cerdas. (2016). *Siap Jadi Juara OSN SMP*. Yogyakarta: Pustakabarupress.

[7] Umar, W. (2016). Strategi Pemecahan Masalah Matematis Versi George Polya dan Penerapannya dalam Pembelajaran Matematika. *Kalamatika*, 1(1), 59-70.

[8] Astuti, K.M.D., & Setiawan, R. (2017). Analisis Strategi Menyederhanakan Masalah Serupa dan Sudut Pandang Lain Pada Permasalahan Non Rutin Penjumlahan Fungsi. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, 6(1), 56-57.

[9] Riffayanti, L., & Setiawan, R. (2017) Analisis Strategi Langkah Mundur dan Bernalar Logis dalam Menentukan Bilangan dan Nilainya, *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika* 6(1), 114-126.

[10] Fauziah, A.N., & Setiawan, R. (2018). Analisis Strategi Bekerja Mundur dan Ekuivalensi Pada Permasalahan Non Rutin Sistem Persamaan. *Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika SOLUSI*, 2 (1), 79-88.

[11] Ayuningrum, S M., & Setiawan, R. (2018). Analisis Penggunaan Strategi Menerka Lalu Menguji Kembali dan Melihat dari Sudut Pandang Lain Dalam Matematika Non-Rutin Untuk Penyelesaian Mencari Nilai *x* Pada Suatu Persamaan. *Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika SOLUSI*, 2,(1), 63-78.